Санкт-Петербургский государственный университет

Кафедра теории управления

Алисейко Алексей Николаевич

Магистерская диссертация

Методы построения матриц Ляпунова для систем с распределенным запаздыванием

Направление 01.04.02

Прикладная математика и информатика

Магистерская программа «Методы прикладной математики и информатики в задачах управления»

Научный руководитель,
доктор физ.-мат. наук,
профессор
Харитонов В. Л.

Санкт-Петербург

2018

Содержание

Введение

Одним из наиболее используемых способов описания динамических процессов являются обыкновенные дифференциальные уравнения. Однако их можно применять лишь для описания процессов, где будущее состояние системы зависит лишь от текущего, но не от прошлых состояний системы. В ряде приложений тем не менее возникают процессы, которые бессмысленно рассматривать без какой-либо зависимости от прошлого. В связи с этим возникает необходимость рассмотрения дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом.

Для приложений весьма актуальным оказывается вопрос качественного поведения системы при малых изменениях начальных условий: проблема устойчивости. Для обыкновенных дифференциальных уравнений хорошо известен метод функций Ляпунова (второй метод Ляпунова). Его прямой перенос на дифференциальные уравнения с запаздыванием оказывается невозможен в связи с одной принципиальной деталью: состоянием для обыкновенных дифференциальных уравнений является точка в конечномерном вещественном пространстве, а для уравнений с запаздываем состоянием оказывается функция. Соответственно, в работах Красовского [2] было предложено использовать функционалы вместо функций. Так, согласно теореме Красовского, для равномерной асимптотической устойчивости достаточно существование положительно-определённого функционала, допускающего соответствующую оценку сверху, производная которого вдоль решений системы отрицательно определена.

Использование метода функционалов Ляпунова—Красовского сводится к двум основным подходам. В первом случае выбирается некоторый функционала, заведомо обладающий требуемыми оценками, который затем дифференцируется вдоль решений системы. Основная трудность в этом подходе заключается в проверке производной на отрицательную определённость. Во втором случае поступают наоборот: сначала выбирается производная, а затем осуществляется построение функционала по уже заданной производной. В этом случае трудностью является проверка функционала на положительную определённость.

Для линейных стационарных систем обыкновенных дифференциальных уравнений известно, что если выбрать производную в виде квадратичной формы, то соответствующая функция Ляпунова оказывается также квадратичной формой. Для нахождения её матрицы даже не требуется трудоёмкое нахождение функции Ляпунова по известной производной: достаточно решить алгебраическое матричное уравнение Ляпунова. Аналогичный подход использовался и для линейных стационарных систем с постоянным запаздыванием [9, 10]. Также рассматривались и так называемые функционалы полного типа [17], производная которых зависит не только от текущих, но и от прошлых состояний системы.

Итак, было установлено, что для построения как функционалов с квадратичной производной [9], так и функционалов полного типа [17] достаточно найти на конечном промежутке одну матричную функцию, удовлетворяющую дифференциальному уравнению с запаздыванием и двум дополнительным условиям. Эта матричная функция получила название матрицы Ляпунова. Вопросы её существования и единственности были изучены в работах [9, 13, 14], но её построение сопряжено с значительными трудностями.

Для некоторых классов систем удаётся свести нахождение матрицы Ляпунова к нахождению решений вспомогательной системы обыкновенных дифференциальных уравнений, удовлетворяющих граничным условиям. Впервые это удалось сделать для систем с одним запаздыванием, систематическое изложение результатов для которых содержится в [16], но затем были разработаны обобщения для систем с несколькими кратными запаздываниями [7] и для класса систем с распределённым запаздыванием [12]. Для общего вида систем с распределённым запаздыванием доступны приближённые методы [14].

В данной работе рассматривается построение матриц Ляпунова для систем с распределённым запаздыванием. В первой части производится усиление результатов, полученных в [12] для систем с распределённым запаздыванием и экспоненциальным ядром. Если же система имеет ядро отличного от экспоненциального вида, то его всегда можно приблизить кусочно-постоянной функцией. Хотя непрерывная зависимость матрицы Ляпунова от ядра и, соответственно, оценка возникающей от такого приближения погрешности остаются открытым вопросом, ожидаемый положительный ответ позволит приближать матрицы Ляпунова для систем с распределённым запаздыванием матрицами Ляпунова для систем с кусочно-постоянным ядром. Нахождение матриц Ляпунова для подобных систем рассматривается во второй части работы.

Основные результаты работы были опубликованы в статьях [1, 4].

Постановка задачи

Рассмотрим систему с распределённым запаздыванием вида

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=0}^{m} A_j x(t - jr) + \int_{-mr}^{0} Q(\theta) x(t + \theta) d\theta, \qquad (1)$$

где $x(t) \in \mathbb{R}^n$, $A_j \in \mathbb{R}^{n\times n}$, $r > 0$, $t \geqslant 0$, $Q(\theta)$ является непрерывной (или кусочно-непрерывной) функцией из $[-mr, 0]$ в $\mathbb{R}^{n\times n}$.

Определение 1. Спектром [5] уравнения (1) называется множество его собственных чисел, то есть

$$\Lambda = \left\{ s \in \mathbb{C} : \det \left[sE - \sum_{j=0}^{m} e^{-sjr} A_j - \int_{-mr}^{0} e^{s\theta} Q(\theta) d\theta \right] = 0 \right\}.$$

Определение 2. Будем говорить, что уравнение (1) удовлетворяет условию Ляпунова [14], если не существует такого собственного числа $s_0 \in \Lambda$, что и $-s_0 \in \Lambda$.

Замечание 1. Условие Ляпунова выполнено тогда и только тогда, когда для всех $s_1, s_2 \in \Lambda$ выполняется $s_1 + s_2 \neq \mathbf{0}$.

Определение 3. Матрица $U(t)$ является матрицей Ляпунова [14] системы (1), ассоциированной с симметрической матрицей W, если выполнены

1. динамическое свойство: при $t \geqslant 0$

$$U'(t) = \sum_{j=0}^{m} U(t - jr) A_j + \int_{-mr}^{0} U(t + \theta) Q(\theta) d\theta, \qquad (2)$$

2. симметрическое свойство:

$$U(-t) = U^T(t), \qquad (3)$$

3. алгебраическое свойство:

$$U'(+0) - U'(-0) = -W. \qquad (4)$$

В настоящей работе рассматривается задача нахождения матрицы Ляпунова системы (1) в двух случаях:

1. Матрицы $A_1 = A_2 = \ldots = A_{m-1} = \mathbf{0}$, а ядро имеет вид

$$Q(\theta) = \sum_{i=1}^{\mu} \eta_i(\theta) B_i,$$

где скалярные функции $\eta_i(\theta)$ удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$\eta_i'(\theta) = \sum_{j=1}^{\mu} \alpha_{ij} \eta_j(\theta), \quad \alpha_{ij} \in \mathbb{R}.$$

2. Ядро является кусочно-постоянным:

$$Q(\theta) = \begin{cases} C_0, & -r \leqslant \theta \leqslant 0, \\ C_1, & -2r \leqslant \theta < -r, \\ \vdots & \\ C_{m-1}, & -mr \leqslant \theta < -(m-1)r. \end{cases}$$

Отметим, что для большинства приложений достаточно найти матрицу Ляпунова на конечном отрезке $[-mr, mr]$, на чём и сфокусировано основное внимание данной работы. Если же потребуются значения матрицы Ляпунова за пределами данного отрезка, то их последующее нахождение сильно упрощается. Действительно, построенная на $[-mr, mr]$ матрица Ляпунова даёт возможность задать начальную функцию, что позволяет свести рассматриваемую проблему к стандартной задаче нахождения решения системы с запаздыванием по начальной функции.

Обзор литературы

Начиная с работ Красовского [2], обобщившего второй метод Ляпунова для систем с запаздыванием, возникла задача построения функционалов, которые можно было бы использовать для анализа устойчивости. Основополагающей работой в данном направлении считается статья Репина [19], где был рассмотрен вопрос построения функционала для систем с одним запаздыванием. Этот функционал выбирался в довольно общем виде с неопределёнными матричными функциональными коэффициентами, дифференцировался вдоль решений системы и приравнивался к другому функционалу. В результате получалась довольно сложная система уравнений связывающая неизвестные коэффициенты между собой и с коэффициентами функционала для производной. В статье предлагается некоторый способ, как её можно попытаться разрешить, хотя вопрос, всегда ли это возможно, остаётся открытым.

Следующей работой в данном направлении стала статья E. F. Infante и W. B. Castelan [10], где при построении функционалов для систем с одним запаздыванием вида

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-h),$$

впервые отмечено, что достаточно знать одну матрицу $Q(t)$, удовлетворяющую

$$Q'(t) = A_0^T Q(t) + A_1^T Q^T(h-t), \quad 0 \leqslant t \leqslant h,$$
$$Q(0) = Q^T(0) = Q_0,$$

с произвольной симметрической матрицей Q_0. Данные свойства довольно похожи на определение 3, хотя и не совпадают с ним. Предлагаемый метод нахождения $Q(t)$ заключался во введение вспомогательной матричной функции $R(t) = Q^T(h-t)$, позволяющей перейти от уравнений с запаздыванием к обыкновенным дифференциальным уравнениям. Граничные условие записывалось в виде $Q(h/2) = R^T(h/2) = F$, где за счёт F требовалось добиться выполнения $Q(0) = Q_0$. Для экспоненциально устойчивого случая приводится явное выражение $Q(t)$ в виде несобственного интеграла.

Фундаментально важной работой является публикация W. Huang [9]. Здесь рассматриваются уже наиболее общие линейные стационарные системы с постоянным запаздыванием (наиболее общие с точки зрения теоремы Рисса о представлении ограниченных линейных функционалов для пространства непрерывных функций). Строится функционал, имеющий вдоль решений системы квадратичную производную вида $x^T(t)Wx(t)$. Впервые приводятся три свойства матрицы Ляпунова из определения 3, как достаточные для построения функционала. Показано, что выполнение условия Ляпунова достаточно для существования матрицы Ляпунова. Позднее в работах В. Л. Харитонова [13, 14] будет доказано, что условие Ляпунова на самом деле эквивалентно существованию и единственности матрицы Ляпунова.

Статья В. Л. Харитонова и А. П. Жабко [17] вводит функционалы полного типа для систем с несколькими кратными запаздываниями вида

$$\dot{x}(t) = \sum_{k=0}^{m} A_k x(t-h_k),$$

$0 = h_0 < h_1 < \ldots < h_m$. Основное отличие функционалов полного типа в производной вдоль решений: теперь она имеет вид

$$\sum_{k=0}^{m} x^T(t-h_k)W_k x(t-h_k) + \sum_{k=1}^{m} \int_{-h_k}^{0} x^T(t+\theta)R_k x(t+\theta)d\theta.$$

По сравнению с работой W. Huang [9] функционалы полного типа имеют преимущество в том, что допускают квадратичную оценку снизу, что оказывается важным в ряде приложений. Функционалы полного типа для других классов систем (в том числе с распределённым запаздыванием) рассматриваются в книге В. Л. Харитонова [14]. Функционалы полного типа позволили обратить теорему Красовского: экспоненциальная устойчивость системы влечёт существование положительно-определённого функционала полного типа, имеющего отрицательно-определённую производную на решениях системы.

Функционалы полного типа нашли множество применений, например, в работе V. L. Kharitonov, D. Hinrichsen [15] они были использованы для получения экспоненциальных оценок на решения системы, в статье В. Л. Харитонова и А. П. Жабко [17] для анализа робастности, а в работе O. Santos, S. Mondié, V. L. Kharitonov для получения субоптимального управления.

Оказалось, что помимо построения разнообразных функционалов матрицы Ляпунова имеют и самостоятельное применение. В работе E. Jarlebring, J. Vanbiervliet, W. Michiels [11] их используют для вычисления $\mathcal{H}_2$ нормы передаточной матрицы системы, затем в публикации В. А. Сумачевой [3] для построения управления, уменьшающего $\mathcal{H}_2$ норму, а в статье G. Ochoa, V. L. Kharitonov, S. Mondié для нахождения критических значений запаздывания. Особо отметим публикацию A. V. Egorov, C. Cuvas, S. Mondié [6] в которой дано необходимое и достаточное условие экспоненциальной устойчивости линейных систем с запаздыванием целиком в терминах матриц Ляпунова, разрешив таким образом проблему проверки функционала полного типа на положительную определённость, упомянутую во введении.

Однако для того, чтобы использовать эти результаты, матрицы Ляпунова необходимо тем или иным образом найти. Основой всех точных методов нахождения матриц Ляпунова являются идеи, изложенные в работе V. L. Kharitonov, E. Plischke [16], где описан процесс нахождения матриц Ляпунова для систем с одним запаздыванием. Для этого вводится вспомогательная матрица $V(t) = U(t-h)$ и рассматривается вспомогательная система дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} U'(t) &= U(t)A_0 + V(t)A_1, \\ V'(t) &= -A_1^T U(t) - A_0^T V(t), \end{aligned}$$

с граничными условиями

$$\begin{gathered} U(0) = V(h), \\ A_0^T V(h) + U(0)A_0 + A_1^T U(h) + V(0)A_1 = -W. \end{gathered}$$

Далее доказывается, что известное решение этой вспомогательной граничной задачи позволяет найти матрицу Ляпунова $\tilde{U}(t)$ по формуле

$$\tilde{U}(t) = \frac{1}{2}[U(t) + V^T(h-t)], \quad t > 0.$$

Оказывается, что если вспомогательная граничная задача имеет единственное решение, то можно просто положить $\tilde{U}(t) = U(t)$. Более того, в работе [16] было показано, что решение вспомогательной системы дифференциальных уравнений с граничными условиями единственно тогда и только тогда, когда выполнено условие Ляпунова, то есть ровно в том случае, когда единственна сама матрица Ляпунова.

Все последующие публикации, связанные с аналитическими методами нахождения матриц Ляпунова следуют указанной схеме. Аналогичные результаты для систем с несколькими кратными запаздываниями можно найти в статье H. Garcia-Lozano., V. L. Kharitonov [7]. В работе В. Л. Харитонова [12] предпринята попытка построения граничной задачи для нахождения матриц Ляпунова систем с распределённым запаздыванием и экспоненциальным ядром. К сожалению, в статье [12] только вводится граничная задача, но не приводится никаких результатов, позволяющих по решениям граничной задачи строить матрицы Ляпунова. Эта затруднение было разрешено в статье А. Н. Алисейко [1], где приводится модификация граничной задачи, позволяющая получить результаты полностью аналогичные [16]. Построению матриц Ляпунова для систем с распределённым запаздыванием и кусочно-постоянным ядром посвящена работа А. Н. Алисейко [4].

Для нахождения матриц Ляпунова также предлагаются и приближённые методы, например кусочно-линейная и полиномиальная аппроксимации в книге В. Л. Харитонова [14].

Глава 1. Системы с экспоненциальным ядром

1.1. Обозначения и вспомогательные сведения

В настоящей главе рассматриваются системы вида

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_m x(t-h) + \sum_{i=1}^{\mu} \int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) B_i x(t+\theta) d\theta, \tag{5}$$

где по сравнению с (1) обозначено $h = mr$.

Напомним, что скалярные функции $\eta_i(\theta)$ удовлетворяют системе линейных дифференциальных уравнений

$$\eta_i'(\theta) = \sum_{j=1}^{\mu} \alpha_{ij} \eta_j(\theta), \quad \alpha_{ij} \in \mathbb{R}.$$

Обозначим $\eta(\theta) = (\eta_1(\theta), \ldots, \eta_\mu(\theta))^T$,

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \ldots & \alpha_{1\mu} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \ldots & \alpha_{2\mu} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_{\mu 1} & \alpha_{\mu 2} & \ldots & \alpha_{\mu\mu} \end{pmatrix}.$$

Ясно, что $\eta'(\theta) = A\eta(\theta)$, а значит $\eta(\theta) = e^{A\theta}\eta(0)$, вследствие чего ядро и было названо экспоненциальным.

Для удобства явно выпишем динамическое свойство (2) из определения 3 матриц Ляпунова для систем вида (5):

$$U'(t) = U(t)A_0 + U(t-h)A_m + \sum_{i=1}^{\mu} \int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) U(t+\theta) B_i d\theta, \quad t \geqslant 0. \tag{6}$$

Также из 6 и свойства симметрии (3) получим

$$U'(t) = -A_0^T U(t) - A_m^T U(t+h) - \sum_{i=1}^{\mu} \int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) B_i^T U(t-\theta) d\theta, \quad t \leqslant 0. \tag{7}$$

Далее неоднократно будет использоваться произведение Кронекера, поэтому напомним его определение. Произведение Кронекера матриц M и N будем обозначать $M \otimes N$, то есть

$$M \otimes N = \begin{pmatrix} m_{11}N & \dots & m_{1q}N \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{p1}N & \dots & m_{pq}N \end{pmatrix},$$

где m_{ij} – соответствующие компоненты матрицы M.

Заметим, что если для матриц M, N, S, T существуют произведения MS и NT, то

$$(M \otimes N)(S \otimes T) = \begin{pmatrix} m_{11}N & \dots & m_{1q}N \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ m_{p1}N & \dots & m_{pq}N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_{11}T & \dots & s_{1r}T \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{q1}T & \dots & s_{qr}T \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} \sum\limits_{i=1}^{q} m_{1i}s_{i1}NT & \dots & \sum\limits_{i=1}^{q} m_{1i}s_{ir}NT \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum\limits_{i=1}^{q} m_{pi}s_{i1}NT & \dots & \sum\limits_{i=1}^{q} m_{pi}s_{ir}NT \end{pmatrix} = MS \otimes NT$$

1.2. Вспомогательная система

Предположим, что существует матрица Ляпунова системы (5). В статье [12] было предложено ввести при $t \in [0, h]$ вспомогательные функции

$$\begin{aligned} Z(t) &= U(t), & X_i(t) &= \int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) U(t+\theta) d\theta, \\ V(t) &= U(t-h), & Y_i(t) &= \int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) V(t-\theta) d\theta, \end{aligned} \tag{8}$$

где $i = 1, \dots, \mu$. Для упрощения обозначений также введём

$$X(t) = \big(X_1(t), \dots, X_\mu(t)\big),$$
$$Y(t) = \big(Y_1(t), \dots, Y_\mu(t)\big).$$

Лемма 1 ([12]). *Пусть* $U(t)$ *– матрица Ляпунова уравнения* (5). *Тогда вспомогательные функции, определяемые* (8), *удовлетворяют системе линейных* *дифференциальных уравнений*

$$
\begin{cases}
Z'(t) = Z(t)A_0 + V(t)A_m + \sum\limits_{i=1}^{\mu} X_i(t)B_i, \\
V'(t) = -A_0^T V(t) - A_m^T Z(t) - \sum\limits_{i=0}^{\mu} B_i^T Y_i(t), \\
X_i'(t) = \eta_i(0)Z(t) - \eta_i(-h)V(t) - \sum\limits_{j=1}^{\mu} \alpha_{ij} X_j(t), \quad 1 \leqslant i \leqslant \mu, \\
Y_i'(t) = \eta_i(-h)Z(t) - \eta_i(0)V(t) + \sum\limits_{j=1}^{\mu} \alpha_{ij} Y_j(t), \quad 1 \leqslant i \leqslant \mu.
\end{cases}
\tag{9}
$$

и граничным условиям

$$
\begin{cases}
Z(0) = V(h), \\
X_i(0) = Y_i^T(h), \quad 1 \leqslant i \leqslant \mu, \\
Y_i(0) = X_i^T(h), \quad 1 \leqslant i \leqslant \mu, \\
Z(0)A_0 + A_0^T V(h) + V(0)A_m + A_m^T Z(h) + \sum\limits_{i=1}^{\mu} \big[X_i(0)B_i + B_i^T Y_i(h)\big] = -W.
\end{cases}
\tag{10}
$$

Доказательство. Дифференциальные уравнения для $Z(t)$ и $V(t)$ следуют непосредственно из определений 8 и свойств матрицы Ляпунова (6), (7). Далее, для всех $i = 1, \ldots, \mu$ интегрированием по частям получим

$$
\begin{aligned}
X_i'(t) &= \int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) U'(t+\theta) d\theta = \\
&= \eta_i(0)U(t) - \eta_i(-h)U(t-h) - \sum_{i=1}^{\mu} \alpha_{ij} \int_{-h}^{0} \eta_j(\theta) U(t+\theta) d\theta = \\
&= \eta_i(0)Z(t) - \eta_i(-h)V(t) - \sum_{i=1}^{\mu} \alpha_{ij} X_j(t), \\
Y_i'(t) &= -\int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) \frac{d}{d\theta}\Big[U(t-h-\theta)\Big] d\theta = \\
&= \eta_i(-h)U(t) - \eta_i(0)U(t-h) + \sum_{i=0}^{\mu} \alpha_{ij} \int_{-h}^{0} \eta_j(\theta) V(t-\theta) d\theta = \\
&= \eta_i(-h)Z(t) - \eta_i(0)V(t) + \sum_{j=1}^{\mu} \alpha_{ij} Y_j(t).
\end{aligned}
$$

Все граничные условия, кроме последнего, также следуют из определений (8). Наконец,

$$-W = U'(+0) - U'(-0) = Z'(0) - V'(h) =$$
$$= Z(0)A_0 + A_0^T V(h) + V(0)A_m + A_m^T Z(h) + \sum_{i=1}^{\mu} \left[X_i(0)B_i + B_i^T Y_i(h)\right]. \qquad \blacksquare$$

Таким образом, если система (5) имеет матрицу Ляпунова, то она содержится среди решений системы (9), удовлетворяющих граничным условиям (10). К сожалению, в работе [12], где и была предложена данная граничная задача, ничего не говорится о том, как среди решений выбрать нужное. Более того, в отличие от хорошо изученного случая систем с одним запаздыванием, где известно, что при выполнении условия Ляпунова решение вспомогательной граничной задачи единственно, решение системы (9), (10) всегда оказывается не единственным.

В связи с этим рассмотрим новые группы граничных условий:

$$X_i(0) = \int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) V(h+\theta) d\theta, \quad 1 \leqslant i \leqslant \mu, \tag{11a}$$

$$X_i(h) = \int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) Z(h+\theta) d\theta, \quad 1 \leqslant i \leqslant \mu, \tag{11b}$$

$$Y_i(0) = \int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) V(-\theta) d\theta, \qquad 1 \leqslant i \leqslant \mu, \tag{11c}$$

$$Y_i(h) = \int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) Z(-\theta) d\theta, \qquad 1 \leqslant i \leqslant \mu. \tag{11d}$$

Как показывает следующая лемма, использование сразу всех условий (11) избыточно:

Лемма 2. *Пусть функции* $(Z(t), V(t), X(t), Y(t))$ *удовлетворяют системе уравнений* (9)*, тогда*

1. (11a) *выполнено тогда и только тогда, когда* (11b)*,*
2. (11c) *выполнено тогда и только тогда, когда* (11d)*.*

Доказательство. Докажем утверждение леммы для $X(t)$, доказательство для $Y(t)$ проводится аналогично.

Перепишем условия (11a) и (11b) в виде

$$X(0) = \int_{-h}^{0} \eta(\theta) \otimes V(h+\theta) d\theta, \quad X(h) = \int_{-h}^{0} \eta(\theta) \otimes Z(h+\theta) d\theta.$$

Введём обозначение $\mathcal{A} = A \otimes E_n$, тогда из (9) получим следующую линейную неоднородную систему дифференциальных уравнений для $X(t)$:

$$X'(t) = \eta(0) \otimes Z(t) - \eta(-h) \otimes V(t) - \mathcal{A}X(t),$$

откуда

$$X(t) = e^{-\mathcal{A}t}X(0) + \int_0^t e^{\mathcal{A}(\xi - t)} \left[\eta(0) \otimes Z(t) - \eta(-h) \otimes V(t)\right] d\xi.$$

Нетрудно проверить, что $e^{\mathcal{A}t} = e^{At} \otimes E$, тогда

$$\begin{aligned} X(t) = e^{-\mathcal{A}t}X(0) + \int_0^t \left[e^{A(\xi - t)} \otimes E\right] \left[\eta(0) \otimes Z(\xi) - \eta(-h) \otimes V(\xi)\right] d\xi = \\ = e^{-\mathcal{A}t}X(0) + \int_0^t \left[e^{A(\xi - t)}\eta(0) \otimes Z(\xi) - e^{A(\xi - t)}\eta(-h) \otimes V(\xi)\right] d\xi = \\ = e^{-\mathcal{A}t}X(0) + \int_{-h}^{t-h} \left[\eta(\theta + h - t) \otimes Z(h + \theta) - \eta(\theta - t) \otimes V(h + \theta)\right] d\theta. \end{aligned} \tag{12}$$

Пусть выполнено (11a), тогда

$$\begin{aligned} e^{-\mathcal{A}h}X(0) = \left[e^{-Ah} \otimes E\right] \int_{-h}^0 \eta(\theta) \otimes V(h + \theta) d\theta = \\ = \int_{-h}^0 \eta(\theta - h) \otimes V(h + \theta) d\theta, \end{aligned}$$

что вместе с (12) даёт (11b).

С другой стороны, если выполнено (11b), то

$$\begin{aligned} X(h) = \int_{-h}^0 \eta(\theta) \otimes Z(h + \theta) d\theta = \\ = \int_{-h}^0 \eta(\theta - h) \otimes V(h + \theta) d\theta + \\ + \int_{-h}^0 \left[\eta(\theta) \otimes Z(h + \theta) - \eta(\theta - h) \otimes V(h + \theta)\right] d\theta. \end{aligned}$$

Сравнивая с (12), получим

$$X(0) = e^{\mathcal{A}h} \int_{-h}^0 \eta(\theta - h) \otimes V(h + \theta) d\theta = \int_{-h}^0 \eta(\theta) \otimes V(h + \theta) d\theta. \qquad \blacksquare$$

Замена переменных в (12) приводит к следующему утверждению:

Следствие 3. *Пусть для решения* $(Z(t), V(t), X(t), Y(t))$ *системы* (9) *выполнены условия* (11), *тогда*

$$X_i(t) = \int_{-h}^{-t} \eta_i(\theta) V(t+h+\theta) d\theta + \int_{-t}^{0} \eta_i(\theta) Z(t+\theta) d\theta,$$
$$Y_i(t) = \int_{-h}^{t-h} \eta_i(\theta) Z(t-\theta-h) d\theta + \int_{t-h}^{0} \eta_i(\theta) V(t-\theta) d\theta.$$

Из леммы 2 видно, что имеется четыре эквивалентных способа выбрать граничные условия из (11): (11a) и (11c), (11a) и (11d), (11b) и (11c), (11b) и (11d). Таким образом, получим систему уравнений (9) относительно $2\mu + 2$ функций. Оставив первое и последнее условие из (10), получим также $2\mu + 2$ граничных условия

$$Z(0) = V(h),$$
$$-W = Z(0)A_0 + A_0^T V(h) + V(0)A_m + A_m^T Z(h) + \sum_{i=1}^{\mu} \left[X_i(0) B_i + B_i^T Y_i(h) \right], \tag{13}$$

и, например, (11a), (11c). Далее будем просто предполагать, что условия (11) выполнены, не указывая какой из четырёх различных наборов граничных условий был выбран в качестве исходного.

Суммируя выше сказанное, приходим к следующему утверждению.

Лемма 4. *Пусть* $U(t)$ *— матрица Ляпунова уравнения* (5). *Тогда вспомогательные функции, определяемые* (8), *удовлетворяют системе линейных дифференциальных уравнений* (9) *и граничным условиям* (11), (13).

Покажем теперь, что процесс обратим и от решений вспомогательной системы можно перейти к матрице Ляпунова.

Лемма 5. *Пусть существует решение системы* (9), *удовлетворяющее* (11), (13), *тогда матричная функция* $U(t)$, *определённая как*

$$U(t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left[Z(t) + V^T(h-t) \right], & t \in [0, h], \\ \frac{1}{2} \left[V(h+t) + Z^T(-t) \right], & t \in [-h, 0), \end{cases}$$

является матрицей Ляпунова системы (5), *ассоциированной с* W.

Доказательство. Непосредственно из определения следует, что для всех $t \neq 0$ выполняется $U(t) = U^T(-t)$, то есть для проверки симметрического свойства остаётся рассмотреть $t = 0$:

$$U(0) = \frac{1}{2}\left[Z(0) + V^T(h)\right] = \frac{1}{2}\left[V(h) + Z^T(0)\right] = U^T(0).$$

Далее, симметричность $U(0)$ влечет и непрерывность $U(t)$ при всех t, очевидна и дифференцируемость при $t \neq 0$.

Покажем, что и динамическое свойство выполнено. Пусть $t \in (0, h]$, тогда

$$U'(t) = U(t)A_0 + U(t-h)A_m + \sum_{i=1}^{\mu} \frac{1}{2}\left[X_i(t) + Y_i^T(h-t)\right] B_i.$$

Из следствия 3 получим

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\left[X_i(t) + Y_i^T(h-t)\right] = {} & \frac{1}{2}\int_{-h}^{-t} \eta_i(\theta)\left[V(h+t+\theta) + Z^T(-t-\theta)\right] d\theta + \\
& + \frac{1}{2}\int_{-t}^{0} \eta_i(\theta)\left[Z(t+\theta) + V^T(h-t-\theta)\right] d\theta = \\
& = \int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) U(t+\theta) d\theta.
\end{aligned}$$

Из полученных равенств следует динамическое свойство:

$$U'(t) = U(t)A_0 + U(t-h)A_m + \sum_{i=1}^{\mu} \int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) U(t+\theta) B_i d\theta.$$

Остаётся показать, что и алгебраическое свойство выполнено. Действительно,

$$\begin{aligned}
U'(+0) - U'(-0) = {} & \frac{1}{2}\left[Z'(0) - V'^T(h)\right] - \frac{1}{2}\left[V'(h) - Z'^T(0)\right] = \\
& = \frac{1}{2}\left[Z'(0) - V'(h)\right] + \frac{1}{2}\left[Z'(0) - V'(h)\right]^T = \\
& = -\frac{1}{2}W - \frac{1}{2}W^T = -W.
\end{aligned}$$

■

Теорема 6. *Пусть существует единственное решение* $(Z(t), V(t), X(t), Y(t))$ *системы* (9)*, удовлетворяющее* (11), (13)*, тогда матричная функция* $U(t)$*, определённая как*

$$U(t) = \begin{cases} Z(t), & t \in [0, h], \\ Z^T(-t), & t \in [-h, 0), \end{cases}$$

является единственной матрицей Ляпунова системы (5)*, ассоциированной с симметрической* W*.*

Доказательство. Введём функции

$$\begin{aligned}
\widetilde{Z}(t) &= V^T(h-t),\\
\widetilde{V}(t) &= Z^T(h-t),\\
\widetilde{X}_i(t) &= Y_i^T(h-t), \quad 1 \leqslant i \leqslant \mu,\\
\widetilde{Y}_i(t) &= X_i^T(h-t), \quad 1 \leqslant i \leqslant \mu.
\end{aligned}$$

Проверим, что набор $(\widetilde{Z}(t), \widetilde{V}(t), \widetilde{X}(t), \widetilde{Y}(t))$ также является решением системы (9), удовлетворяющим (11), (13). Действительно,

$$\begin{aligned}
\widetilde{Z}'(t) &= V^T(h-t)A_0 + Z^T(h-t)A_m + \sum_{i=0}^{\mu} Y_i^T(h-t)B_i =\\
&= \widetilde{Z}(t)A_0 + \widetilde{V}(t)A_m + \sum_{i=0}^{\mu} \widetilde{X}_i(t)B_i,\\
\widetilde{V}'(t) &= -A_0^T Z(h-t) - A_m^T V(h-t) - \sum_{i=1}^{\mu} B_i^T X_i(h-t) =\\
&= -A_0^T \widetilde{V}(t) - A_m^T \widetilde{Z}(t) - \sum_{i=1}^{\mu} B_i^T \widetilde{X}_i(t),\\
\widetilde{X}_i'(t) &= \eta_i(0)V^T(h-t) - \eta_i(-h)Z^T(h-t) - \sum_{j=1}^{\mu} \alpha_{ij} Y_j^T(h-t) =\\
&= \eta_i(0)\widetilde{Z}(t) - \eta_i(-h)\widetilde{V}(t) - \sum_{j=1}^{\mu} \alpha_{ij}\widetilde{X}_j(t),\\
\widetilde{Y}_i'(t) &= \eta_i(-h)V^T(h-t) - \eta_i(0)Z^T(h-t) + \sum_{j=1}^{\mu} \alpha_{ij} X_j^T(h-t) =\\
&= \eta_i(-h)\widetilde{Z}(t) - \eta_i(0)\widetilde{V}(t) + \sum_{j=1}^{\mu} \alpha_{ij}\widetilde{Y}(t).
\end{aligned}$$

Далее проверим выполнение граничных условий:

$$\widetilde{Z}(0) = V^T(h) = Z^T(0) = \widetilde{V}(h),$$

$$\widetilde{Z}(0)A_0 + A_0^T\widetilde{V}(h) + \widetilde{V}(0)A_m + A_m^T\widetilde{Z}(h) + \sum_{i=1}^{\mu}\left[\widetilde{X}_i(0)B_i + B_i^T\widetilde{Y}_i(h)\right] =$$

$$= V^T(h)A_0 + A_0^T Z^T(0) + Z^T(h)A_m + A_m^T V^T(0) + \sum_{i=1}^{\mu}\left[Y_i^T(h)B_i + B_i^T X_i^T(0)\right] =$$

$$= -W^T = -W,$$

$$\widetilde{X}_i(0) = \int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) Z^T(-\theta) d\theta =$$

$$= \int_{-h}^{0} \eta_i(\theta)\widetilde{V}(h+\theta) d\theta,$$

$$\widetilde{Y}_i(0) = \int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) Z^T(h+\theta) d\theta =$$

$$= \int_{-h}^{0} \eta_i(\theta)\widetilde{V}(-\theta) d\theta.$$

В (11) остаются две группы условий, которые можно проверить также непосредственно, либо сослаться на лемму 2.

Так как система (9) с граничными условиями (11), (13) имеет единственное решение, то

$$(Z(t), V(t), X(t), Y(t)) = (\widetilde{Z}(t), \widetilde{V}(t), \widetilde{X}(t), \widetilde{Y}(t)).$$

В частности, $Z(t) = V^T(h-t)$, и заданная в формулировке теоремы функция $U(t)$ является матрицей Ляпунова, получаемой по лемме 5.

Согласно лемме 4, любая матрица Ляпунова позволяет получить решение системы (9) с граничными условиями (11), (13) по формулам (8). Так как получаемые таким образом решения, соответствующие различным матрицам Ляпунова, будут различны, то из единственности решения данной системы следует единственность матрицы Ляпунова. ■

1.3. Вспомогательное утверждение

В предыдущем параграфе было показано, что если вспомогательная система имеет единственное решение, то и матрица Ляпунова единственна. Поэтому, полезно было бы выяснить, когда вспомогательная система имеет единственное решение и всегда ли это выполнено, если существует единственная матрица

Ляпунова. Установим одно свойство решений вспомогательной граничной задачи при $W = \mathbf{0}$, которое сыграет ключевую роль в разрешении поставленных вопросов.

Лемма 7. *Пусть* $(Z(t), V(t), X(t), Y(t))$ *– решение системы* (9)*, удовлетворяющее* (11)*,* (13) *при* $W = \mathbf{0}$*. Тогда для всех* $t \in \mathbb{R}$ *выполняется*

$$Z(t) = V(h+t).$$

Доказательство. Система (9) является системой линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, поэтому любое её решение является аналитической на $\mathbb{R}$ функцией, а значит и $C^\infty(\mathbb{R})$ функцией. Дифференцируя (9), получим, что $(Z'(t), V'(t), X'(t), Y'(t))$ также является решением данной системы. Проверим, выполнение граничных условия (с $W = \mathbf{0}$) для производных.

Так как $W = \mathbf{0}$, то второе условие в (13) даёт

$$Z'(0) = V'(h),$$

также из $V(h) = Z(0)$ и (11) получим

$$\int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) V'(h+\theta) d\theta = \eta_i(0)V(h) - \eta_i(-h)V(0) - \sum_{j=1}^{\mu} \alpha_{ij} \int_{-h}^{0} \eta_j(\theta) V(h+\theta) d\theta =$$

$$= \eta_i(0)Z(0) - \eta_i(-h)V(0) - \sum_{j=1}^{\mu} \alpha_{ij} X_j(0) = X_i'(0),$$

$$\int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) V'(-\theta) d\theta = -\eta_i(0)V(0) + \eta_i(-h)V(h) + \sum_{j=1}^{\mu} \alpha_{ij} \int_{-h}^{0} \eta_j(\theta) V(-\theta) d\theta =$$

$$= \eta_i(-h)Z(0) - \eta_i(0)V(0) + \sum_{j=1}^{\mu} \alpha_{ij} Y_j(0) = Y_i'(0),$$

но тогда по лемме 2 условия (11) выполнены и для производных. Остаётся проверить, что матрица

$$\mathcal{S} = Z'(0)A_0 + A_0^T V'(h) + V'(0)A_m + A_m^T Z'(h) + \sum_{i=1}^{\mu} \left[X_i'(0) B_i + B_i^T Y_i'(h) \right] = \mathbf{0}.$$

Заметив, что

$$Z'(0)A_0 + A_0^T V'(h) = V'(h)A_0 + A_0^T Z'(0)$$

и подставив выражения для производных из (9), нетрудно получить, что

$$\mathcal{S} = \sum_{i=1}^{\mu} \left[X_i'(0) + A_0^T X_i(0) + A_m^T X_i(h) \right] B_i + \sum_{i=1}^{\mu} B_i^T \left[Y_i'(h) - Y_i(h) A_0 - Y_i(0) A_m \right].$$

Преобразуем выражения в квадратных скобках:

$$\begin{aligned} & X_i'(0) + A_0^T X_i(0) + A_m^T X_i(h) = \\ & \qquad = \int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) \left[V'(h+\theta) + A_0^T V(h+\theta) + A_m^T Z(h+\theta) \right] d\theta = \\ & \qquad\qquad = -\sum_{j=1}^{\mu} B_j^T \int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) Y_j(h+\theta) d\theta, \\ & Y_i'(h) - Y_i(h) A_0 - Y_i(0) A_m = \\ & \qquad = \int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) \left[Z'(-\theta) - Z(-\theta) A_0 - V(-\theta) A_m \right] d\theta = \\ & \qquad\qquad = \sum_{j=1}^{\mu} \int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) X_j(-\theta) d\theta B_j. \end{aligned}$$

Таким образом

$$\begin{aligned} \mathcal{S} &= -\sum_{i=1}^{\mu}\sum_{j=1}^{\mu} B_j^T \int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) Y_j(h+\theta) d\theta B_i + \sum_{i=1}^{\mu}\sum_{j=1}^{\mu} B_i^T \int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) X_j(-\theta) d\theta B_j = \\ &= -\sum_{i=1}^{\mu}\sum_{j=1}^{\mu} B_j^T \int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) Y_j(h+\theta) d\theta B_i + \sum_{\bar{i}=1}^{\mu}\sum_{\bar{j}=1}^{\mu} B_{\bar{j}}^T \int_{-h}^{0} \eta_{\bar{j}}(\theta) X_{\bar{i}}(-\theta) d\theta B_{\bar{i}}. \end{aligned}$$

Таким образом, если

$$\int_{-h}^{0} \eta_j(\theta) X_i(-\theta) d\theta = \int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) Y_j(h+\theta) d\theta,$$

то $\mathcal{S} = \mathbf{0}$. Действительно, из следствия 3 имеем:

$$\begin{aligned} & \int_{-h}^{0} \eta_j(\theta) X_i(-\theta) d\theta = \\ & \qquad = \int_{-h}^{0} \eta_j(\theta) \left[\int_{-h}^{\theta} \eta_i(\xi) V(-\theta+h+\xi) d\xi + \int_{\theta}^{0} \eta_i(\xi) Z(-\theta+\xi) d\xi \right] d\theta = \\ & \qquad = \int_{-h}^{0} \eta_i(\xi) \left[\int_{\xi}^{0} \eta_j(\theta) V(h+\xi-\theta) d\theta + \int_{-h}^{\xi} \eta_j(\theta) Z(\xi-\theta) d\theta \right] d\xi = \\ & \qquad\qquad = \int_{-h}^{0} \eta_i(\xi) Y_j(h+\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Итак, было показано, что производные исходного решения также удовлетворяют системе (9) с граничными условиями (11), (13) при $W = \mathbf{0}$. По индукции, для всех $k \geqslant 0$ функции $(Z^{(k)}(t), V^{(k)}(t), X^{(k)}(t), Y^{(k)}(t))$ являются решением системы (9) с граничными условиями (11), (13). В частности, для всех $k \geqslant 0$ выполнено

$$Z^{(k)}(0) = V^{(k)}(h).$$

Но это значит, что две аналитических на $\mathbb{R}$ функции $Z(t)$ и $V(h+t)$ вместе со всеми своими производными равны между собой при $t = 0$, а следовательно и тождественно равны, что и требовалось доказать. ■

Из леммы 7 и следствия 3 непосредственно получим:

Следствие 8. *Пусть* $(Z(t), V(t), X(t), Y(t))$ *– решение системы* (9)*, удовлетворяющее* (11)*,* (13) *при* $W = \mathbf{0}$*. Тогда для всех* $t \in \mathbb{R}$ *выполняется*

$$X_i(t) = \int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) Z(t+\theta) d\theta,$$
$$Y_i(t) = \int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) V(t-\theta) d\theta.$$

1.4. Единственность решения граничной задачи

Хорошо известно [9, 14], что условие Ляпунова (определение 2) является необходимым и достаточным условием существования и единственности матрицы Ляпунова. Покажем, что условие Ляпунова эквивалентно и единственности решений вспомогательной граничной задачи.

Теорема 9. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1. *Существует единственное решение вспомогательной системы* (9) *с граничными условиями* (11)*,* (13)*.*
2. *Существует единственная матрица Ляпунова, ассоциированная с* W*.*
3. *Система* (5) *удовлетворяет условию Ляпунова.*

Доказательство.

То, что из 1 следует 2 было доказано в теореме 6.

Покажем, что из утверждения 2 следует утверждение 3. Пусть условие Ляпунова не выполнено. В соответствии с определением 1 спектром системы (5) является множество

$$\Lambda = \left\{ s \in \mathbb{C} : \det \left[sE - \sum_{j=0}^{m} A_j e^{-sjr} - \sum_{j=0}^{m-1} C_j \int_{-(j+1)r}^{-jr} e^{s\theta} d\theta \right] = 0 \right\}.$$

Так как условие Ляпунова не выполнено, то найдётся число $s_0 \in \mathbb{C}$ и векторы $\gamma, \mu \neq \mathbf{0}$, для которых

$$s_0 \gamma^T = \gamma^T A_0 + e^{-s_0 h} \gamma^T A_m + \sum_{i=1}^{\mu} \int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) e^{s_0 \theta} \gamma^T B_i d\theta,$$
$$-s_0 \mu^T = \mu^T A_0 + e^{s_0 h} \mu^T A_m + \sum_{i=1}^{\mu} \int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) e^{-s_0 \theta} \mu^T B_i d\theta.$$

Построим матрицу $U_0(t) \not\equiv \mathbf{0}$:

$$U_0(t) = e^{s_0 t} \mu \gamma^T + e^{-s_0 t} \gamma \mu^T.$$

Тогда

$$\begin{aligned}
U_0'(t) &= s_0 e^{s_0 t} \mu \gamma^T - s_0 e^{-s_0 t} \gamma \mu^T = \\
&= e^{s_0 t} \mu \left[\gamma^T A_0 + e^{-s_0 h} \gamma^T A_m + \sum_{i=1}^{\mu} \int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) e^{s_0 \theta} \gamma^T B_i d\theta \right] + \\
&\qquad + e^{-s_0 t} \gamma \left[\mu^T A_0 + e^{s_0 h} \mu^T A_m + \sum_{i=1}^{\mu} \int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) e^{-s_0 \theta} \mu^T B_i d\theta \right] = \\
&= U_0(t) A_0 + U_0(t-h) A_1 + \sum_{i=1}^{\mu} \int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) U_0(t+\theta) B_i d\theta,
\end{aligned}$$

то есть выполнено динамическое свойство. Ясно, что $U_0^T(t) = U_0(-t)$. Производная $U_0(t)$ непрерывна в нуле, значит

$$U'(+0) - U'(-0) = \mathbf{0}.$$

Таким образом, $U_0(t)$ является матрицей Ляпунова, ассоциированной с $\mathbf{0}$. Но тогда для любой матрицы Ляпунова $U(t)$, ассоциированной с W, матрица $U(t) + U_0(t)$ будет отличной от $U(t)$ матрицей Ляпунова, ассоциированной с W, что противоречит единственности. Значит исходное предположение было неверным и условие Ляпунова выполнено.

Покажем, что из 3 следует 1, а точнее, что если утверждение 1 не выполнено, то не выполнено и условие Ляпунова. Система (9) — линейная, поэтому её решения линейно зависят от начальных условий $(Z(0), V(0), X(0), Y(0))$. Граничные условия (11), (13) линейны по вспомогательным функциям, поэтому подстановка этих линейных зависимостей приводит граничные условия к системе линейных алгебраических уравнений относительно начальных условий $(Z(0), V(0), X(0), Y(0))$. Значит, если решение вспомогательной задачи или не существует, или не единственно, то соответствующая однородная система должна иметь нетривиальное решение. Соответственно, граничная задача имеет нетривиальное решение $(Z(t), V(t), X(t), Y(t)) \not\equiv \mathbf{0}$ для $W = \mathbf{0}$.

Для данного решения по лемме 7 и следствию 8 имеем

$$\begin{aligned} V(t) &= Z(t-h), \\ X_i(t) &= \int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) Z(t+\theta) d\theta, \\ Y_i(t) &= \int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) V(t-\theta) d\theta. \end{aligned}$$

Из этих соотношений очевидно, что $Z(t) \not\equiv \mathbf{0}$ (в противном случае решение тривиально). Аналогично, $V(t) \not\equiv \mathbf{0}$.

Любое решение системы (9) имеет вид

$$\begin{aligned} Z(t) &= \sum_{k=1}^{\nu} e^{s_k t} \mathcal{P}_k(t), \quad & V(t) &= \sum_{k=1}^{\nu} e^{s_k t} \mathcal{Q}_k(t), \\ X_i(t) &= \sum_{k=1}^{\nu} e^{s_k t} \mathcal{R}_{ik}(t), & Y_i(t) &= \sum_{k=1}^{\nu} e^{s_k t} \mathcal{S}_{ik}(t), \end{aligned} \tag{14}$$

где $1 \leqslant i \leqslant \mu$, $s_1, s_2, \ldots, s_\nu$ — различные собственные числа системы (9), $\mathcal{P}_k(t), \mathcal{Q}_k(t)$, $\mathcal{R}_{ik}(t), \mathcal{S}_{ik}(t)$ — полиномы с матричными коэффициентами. Так как $Z(t) \not\equiv \mathbf{0}$, то для некоторого номера d выполнено $\mathcal{P}_d(t) \not\equiv \mathbf{0}$, то есть $\mathcal{P}_d(t) = t^l P_0 + \ldots + P_l$ с $P_0 \neq \mathbf{0}$. Но тогда

$$V(t) = Z(t-h) = \sum_{k=1}^{\nu} e^{s_k t} e^{-s_k h} \mathcal{P}_k(t-h),$$

откуда $\deg \mathcal{Q}_d(t) = l$ и старший коэффициент $\mathcal{Q}_d(t)$ равен $P_0 e^{-s_d h}$. Далее,

$$X_i(t) = \int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) Z(t+\theta) d\theta = \sum_{k=1}^{\nu} e^{s_k t} \int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) e^{s_k \theta} \mathcal{P}_k(t+\theta) d\theta,$$
$$Y_i(t) = \int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) V(t-\theta) d\theta = \sum_{k=1}^{\nu} e^{s_k t} \int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) e^{-s_k \theta} \mathcal{Q}_k(t-\theta) d\theta,$$

значит $\deg \mathcal{R}_{id}(t) \leqslant l$, $\deg \mathcal{S}_{id}(t) \leqslant l$, и полиномы $\mathcal{R}_{id}(t)$, $\mathcal{S}_{id}(t)$ имеют при t^l коэффициенты

$$\int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) e^{s_d \theta} d\theta P_0, \quad e^{-s_d h} \int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) e^{-s_d \theta} d\theta P_0,$$

соответственно. Подставим представления (14) в систему (9):

$$\sum_{k=1}^{\nu} e^{s_k t} \left[s_k \mathcal{P}_k(t) + \mathcal{P}_k'(t) \right] = \sum_{k=1}^{\nu} e^{s_k t} \left[\mathcal{P}_k(t) A_0 + \mathcal{Q}_k(t) A_m + \sum_{i=1}^{\mu} \mathcal{R}_{ik}(t) B_i \right],$$
$$\sum_{k=1}^{\nu} e^{s_k t} \left[s_k \mathcal{Q}_k(t) + \mathcal{Q}_k'(t) \right] = -\sum_{k=1}^{\nu} e^{s_k t} \left[A_m^T \mathcal{P}_k(t) + A_0^T \mathcal{Q}_k(t) + \sum_{i=1}^{\mu} B_i^T \mathcal{S}_{ik}(t) \right].$$

Так как все показатели s_k различны, то равенство квазиполиномов возможно только при равенстве полиномиальных множителей, значит

$$s_d \mathcal{P}_d(t) + \mathcal{P}_d'(t) = \mathcal{P}_d(t) A_0 + \mathcal{Q}_d(t) A_m + \sum_{i=1}^{\mu} \mathcal{R}_{id}(t) B_i,$$
$$-s_d \mathcal{Q}_d(t) - \mathcal{Q}_d'(t) = A_m^T \mathcal{P}_d(t) + A_0^T \mathcal{Q}_d(t) + \sum_{i=1}^{\mu} B_i^T \mathcal{S}_{id}(t).$$

Рассматривая коэффициенты при t^l, получим

$$s_d P_0 = P_0 \left[A_0 + e^{-s_d h} A_m + \sum_{i=1}^{\mu} \int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) e^{s_d \theta} B_i d\theta \right],$$
$$-s_d e^{-s_d h} P_0 = \left[e^{s_d h} A_m^T + A_0^T + \sum_{i=1}^{\mu} \int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) e^{-s_d \theta} B_i^T d\theta \right] e^{-s_d h} P_0.$$

Так как $P_0 \neq \mathbf{0}$, то

$$\det \left[s_d E - A_0 - e^{-s_d h} A_m - \sum_{i=1}^{\mu} \int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) e^{s_d \theta} B_i d\theta \right] = 0,$$
$$\det \left[-s_d E - A_0 - e^{s_d h} A_m - \sum_{i=1}^{\mu} \int_{-h}^{0} \eta_i(\theta) e^{-s_d \theta} B_i d\theta \right] = 0,$$

значит $s_d \in \Lambda$, $-s_d \in \Lambda$ и условие Ляпунова не выполнено, что и требовалось доказать. $\blacksquare$

1.5. Пример

Рассмотрим пример из статьи [12]:

$$\dot{x}(t) = A_0 x(t) + A_1 x(t-1) + \int_{-1}^{0} [\sin(\pi\theta)B_1 + \cos(\pi\theta)B_2] x(t+\theta) d\theta, \qquad (15)$$

где

$$A_0 = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$B_1 = \begin{pmatrix} 0.3 & 0 \\ 0 & 0.3 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0.3 \\ -0.3 & 0 \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что приведённая в статье [12] допускает не единственное решение (существует четыре линейно независимых решения однородной системы), хотя система (15) и удовлетворяет условию Ляпунова, то есть для любой симметрической матрицы W ассоциированная с ней матрица Ляпунова единственна. Таким образом, граничная задача из статьи [12] не подходит для нахождения матрицы Ляпунова, а приведённый в ней график компонент матрицы Ляпунова не воспроизводим.

Рассмотрим, что получается в результате описанного в предыдущих параграфах подхода. Вспомогательная система (9) имеет вид

$$\begin{cases} Z'(t) = Z(t)A_0 + V(t)A_1 + X_1(t)B_1 + X_2(t)B_2, \\ V'(t) = -A_0^T V(t) - A_1^T Z(t) - B_1^T Y_1(t) - B_2^T Y_2(t), \\ X_1'(t) = -\pi X_2(t), \\ X_2'(t) = Z(t) + V(t) + \pi X_1(t), \\ Y_1'(t) = \pi Y_2(t), \\ Y_2'(t) = -Z(t) - V(t) - \pi Y_1(t), \end{cases}$$

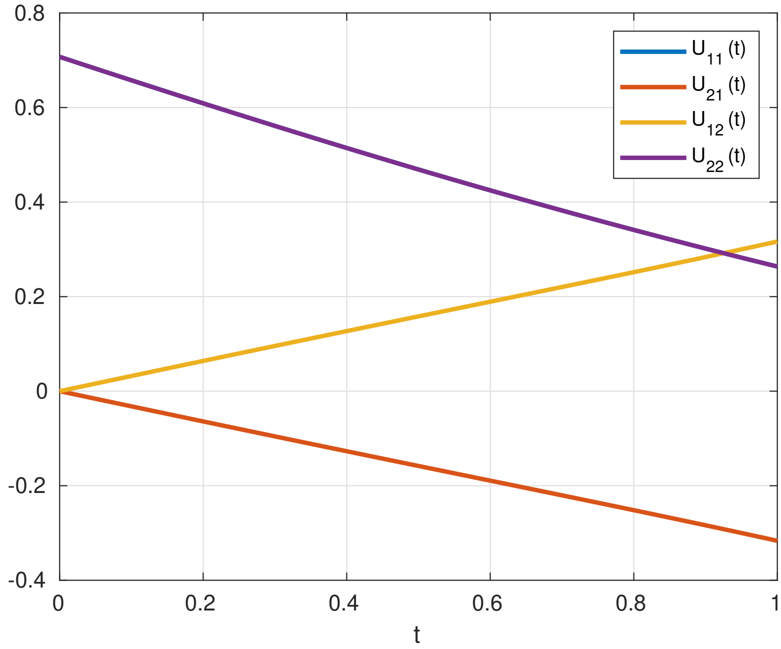

Рис. 1: Компоненты матрицы Ляпунова $U(t)$, $U_{11}(t) = U_{22}(t)$

а граничные условия (13), (11a), (11c) превратятся в

$$\begin{cases} Z(0) = V(h), \\ X_1(0) = \displaystyle\int_{-h}^{0} \sin(\pi\theta)V(h+\theta)d\theta, \\ X_2(0) = \displaystyle\int_{-h}^{0} \cos(\pi\theta)V(h+\theta)d\theta, \\ Y_1(0) = \displaystyle\int_{-h}^{0} \sin(\pi\theta)V(-\theta)d\theta, \\ Y_2(0) = \displaystyle\int_{-h}^{0} \cos(\pi\theta)V(-\theta)d\theta, \\ Z(0)A_0 + A_0^T V(h) + V(0)A_1 + A_1^T Z(h) + \\ \qquad\qquad + X_1(0)B_1 + B_1^T Y_1(h) + X_2(0)B_2 + B_2^T Y_2(h) = -W. \end{cases}$$

Корректная матрица Ляпунова для системы (15) при $W = E$ приведена на рисунке 1. Заметим, что в статье [12] было описано сокращение числа вспомогательных функций в случаях, когда $\eta_i(\theta)$ удовлетворяют дополнительным соотношениям, поэтому приводимая там система уравнений имеет меньший размер, что возможно осуществить и для граничной задачи (9), (11), (13), но не рассматривалось в настоящей работе.

Глава 2. Системы с кусочно-постоянным ядром

2.1. Обозначения и вспомогательные сведения

В этой главе рассматриваются системы вида

$$\dot{x}(t) = \sum_{j=0}^{m} A_j x(t - jr) + \sum_{j=0}^{m-1} C_j \int_{-(j+1)r}^{-jr} x(t+\theta)d\theta, \tag{16}$$

где $r > 0$, а матрицы $A_j, C_j \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Для систем вида (16) динамическое свойство 2 из определения 3 принимает вид

$$U'(t) = \sum_{j=0}^{m} U(t - jr)A_j + \sum_{j=0}^{m-1} \int_{-(j+1)r}^{-jr} U(t+\theta)C_j d\theta, \quad t \geqslant 0. \tag{17}$$

Из (17) и свойства симметрии (3) следует, что при $t < 0$

$$U'(t) = -\left[U'(-t)\right]^T = -\sum_{j=0}^{m} A_j^T U(t+jr) - \sum_{j=0}^{m-1} C_j^T \int_{jr}^{(j+1)r} U(t+\theta)d\theta. \tag{18}$$

С учётом (17) и (18) алгебраическое свойство (4) можно записать в виде

$$\sum_{j=0}^{m} \left[U(-jr)A_j + A_j^T U(jr)\right] + \\ + \sum_{j=0}^{m-1} \left[\int_{-(j+1)r}^{-jr} U(\theta)C_j d\theta + C_j^T \int_{jr}^{(j+1)r} U(\theta)d\theta\right] = -W. \tag{19}$$

Далее также потребуется операция векторизации $\mathrm{vec} : \mathbb{R}^{m\times n} \to \mathbb{R}^{mn}$, сопоставляющая матрице X размерности $m \times n$ вектор-столбец $\mathrm{vec}(X)$ размерности mn, получаемый последовательным размещением столбцов матрицы X друг под другом. Известно следующее важное свойство данной операции:

$$\mathrm{vec}(AXB) = (B^T \otimes A)\,\mathrm{vec}(X),$$

где $\otimes$ — произведение Кронекера, определённое в параграфе 1.1. Как следствие приведённого выше тождества получим

$$\mathrm{vec}(AX) = \mathrm{vec}(AXE_n) = (E_n \otimes A)\,\mathrm{vec}(X),$$
$$\mathrm{vec}(XB) = \mathrm{vec}(E_m XB) = (B^T \otimes E_m)\,\mathrm{vec}(X).$$

2.2. Вспомогательная система

В этом параграфе будет представлена граничная задача, позволяющая свести нахождение матрицы Ляпунова для систем вида (16) к нахождению решений системы линейных обыкновенных дифференциальных уравнений, удовлетворяющих ряду дополнительных условий.

Предположим, что существует матрица Ляпунова $U(t)$ системы (16), ассоциированная с симметрической матрицей W. Введём $4m-1$ вспомогательную матричную функцию:

$$\begin{aligned} Y_i(t) &= U(t+ir), && -m \leqslant i \leqslant m-1, \\ Z_i(t) &= \int_{(i-1)r}^{ir} U(t+\theta)d\theta, && -m+1 \leqslant i \leqslant m-1, \end{aligned} \tag{20}$$

где $t \in [0, r]$. Для упрощения обозначений также введём

$$Y(t) = \big(Y_{m-1}(t), \dots, Y_{-m}(t)\big), \quad Z(t) = \big(Z_{m-1}(t), \dots, Z_{-m+1}(t)\big).$$

Лемма 10. *Пусть* $U(t)$ *— матрица Ляпунова уравнения* (16). *Тогда вспомогательные функции, определяемые* (20), *удовлетворяют системе линейных дифференциальных уравнений*

$$\begin{cases} Y_i'(t) = \sum\limits_{j=0}^{m} Y_{i-j}(t)A_j + \sum\limits_{j=0}^{m-1} Z_{i-j}(t)C_j, & 0 \leqslant i \leqslant m-1, \\ Y_i'(t) = -\sum\limits_{j=0}^{m} A_j^T Y_{i+j}(t) - \sum\limits_{j=0}^{m-1} C_j^T Z_{i+j+1}(t), & -m \leqslant i \leqslant -1, \\ Z_i'(t) = Y_i(t) - Y_{i-1}(t), & -m+1 \leqslant i \leqslant m-1, \end{cases} \tag{21}$$

и граничным условиям

$$\begin{cases} Y_i(0) = Y_{i-1}(r), & -m+1 \leqslant i \leqslant m-1, \\ Z_i(0) = Z_{i-1}(r), & -m+2 \leqslant i \leqslant m-1, \\ Z_0(0) = \int\limits_0^r Y_{-1}(\xi)d\xi, & \\ \sum\limits_{j=0}^{m} \big[Y_{-j}(0)A_j + A_j^T Y_{j-1}(r)\big] + \sum\limits_{j=0}^{m-1} \big[Z_{-j}(0)C_j + C_j^T Z_j(r)\big] = -W. & \end{cases} \tag{22}$$

Доказательство. Уравнения (21) получаются непосредственной подстановкой определений (20) в уравнения (17), (18). Граничные условия (22) очевидны из задания вспомогательных функций (20) и алгебраического свойства (19). ∎

Лемма 11. *Для любого решения системы* (21), (22) *выполняется:*

$$Z_i(0) = \int_0^r Y_{i-1}(\xi)d\xi, \quad Z_i(r) = \int_0^r Y_i(\xi)d\xi,$$

где $-m+1 \leqslant i \leqslant m-1$.

Доказательство. Ясно, что утверждение леммы справедливо для $Z_0(0)$ и $Z_{-1}(r)$. Тогда,

$$\begin{aligned} Z_1(0) = Z_0(r) = Z_0(0) + \int_0^r \left[Y_0(\xi) - Y_{-1}(\xi)\right] d\xi = \\ = \int_0^r Y_0(\xi)d\xi, \\ Z_{-2}(r) = Z_{-1}(0) = Z_{-1}(r) - \int_0^r \left[Y_{-1}(\xi) - Y_{-2}(\xi)\right] d\xi = \\ = \int_0^r Y_{-2}(\xi)d\xi. \end{aligned}$$

Дальнейшие рассуждения аналогичны. ∎

Следствие 12. *Для любого решения системы* (21), (22) *выполняется:*

$$Z_i(t) = \int_0^t Y_i(\xi)d\xi + \int_t^r Y_{i-1}(\xi)d\xi.$$

Замечание 2. Утверждение леммы 11 и следствия 12 остаётся верным и для любого решения системы (21), удовлетворяющего всем граничным условиям (22) кроме последнего, которое не используется в доказательстве.

Отметим, что лемма 11 играет для систем (16) роль, схожую с леммой 2 для систем (5). Действительно, из леммы 11 следует, что интегральное условие, использованное в (22), ничем не отличается от ему подобных. Значит, любое из условий, приведённых в формулировке леммы 11, равносильно может быть использовано при построение вспомогательной граничной задачи.

Лемма 13. *Пусть* $(Y(t), Z(t))$ *являются решением системы* (21), (22). *Тогда матрица* $U(t)$, *определяемая как*

$$U(t) = \frac{1}{2}\left[Y_i(t-ir) + Y^T_{-i-1}\left((i+1)r - t\right)\right], \quad t \in [ir, (i+1)r], \quad 0 \leqslant i \leqslant m-1,$$

и $U(t)=U^T(-t)$ для $t<0$, является матрицей Ляпунова, ассоциированной с W.

Доказательство. Проверим, что определение матрицы $U(t)$ однозначно. Действительно, при $t=ir$ $(1\leqslant i\leqslant m-1)$ имеем

$$U(ir+0)=\frac{1}{2}\left[Y_i(0)+Y_{-i-1}^T(r)\right]=\frac{1}{2}\left[Y_{i-1}(r)+Y_{-i}^T(0)\right]=U(ir-0).$$

Так как

$$U(0)=\frac{1}{2}\left[Y_0(0)+Y_{-1}^T(r)\right]=\frac{1}{2}\left[Y_{-1}(r)+Y_0^T(0)\right]=U(0)^T,$$

то функция $U(t)$ непрерывна и удовлетворяет симметрическому свойству.

Рассмотрим $t\in[ir,(i+1)r]$, из следствия 12 получим

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left[Z_{i-j}(t-ir)+Z_{j-i}^T((i+1)r-t)\right]&=\frac{1}{2}\int_0^{t-ir}\left[Y_{i-j}(\xi)+Y_{j-i-1}^T(r-\xi)\right]d\xi=\\&+\frac{1}{2}\int_{t-ir}^{r}\left[Y_{i-j-1}(\xi)+Y_{j-i}^T(r-\xi)\right]d\xi=\\&=\int_{(i-j)r}^{t-jr}U(\theta)d\theta+\int_{t-(j-1)r}^{(i-j)r}U(\theta)d\theta=\\&=\int_{-(j-1)r}^{-jr}U(t+\eta)d\eta.\end{aligned}$$

Значит,

$$\begin{aligned}U'(t)&=\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left[Y_i(t-ir)+Y_{-i-1}^T\left((i+1)r-t\right)\right]=\\&=\sum_{j=0}^{m}U(t-jr)A_j+\sum_{j=0}^{m-1}\int_{-(j+1)r}^{-jr}U(t+\eta)C_jd\eta.\end{aligned}$$

Правая часть полученного выражения не зависит от i, а функция $U(t)$ непрерывна, значит и её производная $U'(t)$ непрерывна, то есть динамическое свойство выполнено.

Остаётся проверить алгебраическое свойство:

$$\begin{aligned}U'(+0)-U'(-0)&=\frac{1}{2}\left[Y_0'(0)-Y_{-1}'^T(r)\right]-\frac{1}{2}\left[Y_{-1}'(r)-Y_0'^T(0)\right]=\\&=\frac{1}{2}\left[Y_0'(0)-Y_{-1}'(r)\right]+\frac{1}{2}\left[Y_0'(0)-Y_{-1}'(r)\right]^T=\\&=-\frac{1}{2}W-\frac{1}{2}W^T=-W.\end{aligned}$$

■

Теорема 14. *Пусть система (21), (22) имеет единственное решение, тогда существует единственная ассоциированная с W матрица Ляпунова $U(t)$, определяемая как*

$$U(t) = Y_i(t - ir), \quad t \in [ir, (i+1)r], \quad 0 \leqslant i \leqslant m-1,$$

и $U(t) = U^T(-t)$ *при* $t < 0$.

Доказательство. Единственность матрицы Ляпунова очевидна, ведь получаемые по формулам (20) вспомогательные матрицы с одной стороны различны для различных $U(t)$, а с другой стороны по лемме 10 являются решениями (21), (22), что невозможно. Докажем, что в рассматриваем случае $U(t)$ можно находить указанным образом.

Пусть $(Y(t), Z(t))$ — решение системы. Рассмотрим

$$\begin{aligned}\tilde{Y}_i(t) &= Y^T_{-i-1}(r-t), \ \ -m \leqslant i \leqslant m-1,\\ \tilde{Z}_i(t) &= Z^T_{-i}(r-t), \quad\ \ -m+1 \leqslant i \leqslant m-1.\end{aligned}$$

Тогда, при $i \geqslant 0$

$$\begin{aligned}\tilde{Y}'_i(t) &= -\left[Y'_{-i-1}(r-t)\right]^T =\\ &= \sum_{j=0}^{m} Y^T_{j-i-1}(r-t)A_j + \sum_{j=0}^{m-1} Z^T_{j-i}(r-t)C_j =\\ &= \sum_{j=0}^{m} \tilde{Y}_{i-j}(t)A_j + \sum_{j=0}^{m-1} \tilde{Z}_{i-j}(t)C_j,\end{aligned}$$

при $i < 0$

$$\begin{aligned}\tilde{Y}'_i(t) &= -\left[Y'_{-i-1}(r-t)\right]^T =\\ &= -\sum_{j=0}^{m} A_j^T Y^T_{-i-1-j}(r-t) - \sum_{j=0}^{m-1} C_j^T Z^T_{-i-j-1}(r-t) =\\ &= -\sum_{j=0}^{m} A_j^T \tilde{Y}_{i+j}(t) - \sum_{j=0}^{m-1} C_j^T \tilde{Z}^T_{i+j+1}(t),\end{aligned}$$

наконец

$$\begin{aligned}\tilde{Z}'_i(t) = -\left[Z'_{-i}(r-t)\right]^T &= -Y^T_{-i}(r-t) + Y^T_{-i-i}(r-t) =\\ &= \tilde{Y}_i(t) - \tilde{Y}_{i-1}(t).\end{aligned}$$

Далее, для всех рассматриваемых в (22) индексов i выполняется

$$\tilde{Y}_i(0) = Y^T_{-i-1}(r) = Y^T_{-i}(0) = \tilde{Y}_{i-1}(r),$$
$$\tilde{Z}_i(0) = Z^T_{-i}(r) = Z^T_{-i+1}(0) = \tilde{Z}_{i-1}(r).$$

Нетрудно видеть, что и

$$\tilde{Z}_0(0) = Z^T_0(r) = \int_0^r Y^T_0(\theta)d\theta = \int_0^r \tilde{Y}_{-1}(\theta)d\theta.$$

Остаётся лишь заметить, что

$$\tilde{Y_0}'(0) - \tilde{Y}'_{-1}(r) = [-Y'_{-1}(r) + Y'_0(0)]^T = W^T = W.$$

Таким образом и $(\tilde{Y}(t), \tilde{Z}(t))$ являются решением (21), (22). Единственность позволяет утверждать, что $Y_i(t) = Y^T_{-i-1}(r-t)$, $Z_i(t) = Z^T_{-i}(r-t)$, откуда из леммы 13 и следует требуемое. ■

2.3. Матричная форма

Покажем, как решение вспомогательной системы сводится к решению системы линейных алгебраический уравнений.

Пусть $\mathcal{A}_i = A_i^T \otimes E$, $\mathcal{C}_i = C_i^T \otimes E$, $\mathfrak{A}_i = E \otimes A_i^T$, $\mathfrak{C}_i = E \otimes C_i^T$, $y_i(t) = \mathrm{vec}(Y_i(t))$, $z_i(t) = \mathrm{vec}(Z_i(t))$ и

$$y(t) = \begin{pmatrix} y_{m-1}(t) \\ \vdots \\ y_{-m}(t) \end{pmatrix}, \quad z(t) = \begin{pmatrix} z_{m-1}(t) \\ \vdots \\ z_{-m+1}(t) \end{pmatrix}, \quad \mathcal{E}_i = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \dots & E & \dots & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

где $\mathcal{E}_i$ состоит из $4m-1$ блоков, один из которых имеет вид единичной матрицы и стоит на i-том месте. Векторизуем систему (21), используя свойства векторизации из параграфа 2.1. В результате получим систему вида

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} = L \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}, \qquad L = \begin{pmatrix} A & C \\ D & \mathbf{0} \end{pmatrix}, \tag{23}$$

где A — квадратная матрица порядка $2mn^2$, C и D — матрицы порядков

$2mn^2 \times (2m-1)n^2$ и $(2m-1)n^2 \times 2mn^2$, соответственно:

$$A = \begin{bmatrix} \mathcal{A}_0 & \dots & \mathcal{A}_{m-1} & \mathcal{A}_m & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \mathcal{A}_0 & \mathcal{A}_1 & \dots & \mathcal{A}_m \\ -\mathfrak{A}_m & \dots & -\mathfrak{A}_1 & -\mathfrak{A}_0 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & -\mathfrak{A}_m & -\mathfrak{A}_{m-1} & \dots & -\mathfrak{A}_0 \end{bmatrix},$$

$$C = \begin{bmatrix} \mathcal{C}_0 & \dots & \mathcal{C}_{m-1} & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & \mathcal{C}_0 & \dots & \mathcal{C}_{m-1} \\ -\mathfrak{C}_{m-1} & \dots & -\mathfrak{C}_0 & \dots & \mathbf{0} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{0} & \dots & -\mathfrak{C}_{m-1} & \dots & -\mathfrak{C}_0 \end{bmatrix},$$

$$D = \begin{bmatrix} E & -E & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & E & -E & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & -E & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & E & -E \end{bmatrix}.$$

Граничные условия (22) примут вид

$$M \begin{pmatrix} y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} + \tilde{N} \int_0^r \begin{pmatrix} y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} dt + N \begin{pmatrix} y(r) \\ z(r) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} \\ -w \end{pmatrix}, \tag{24}$$

где $w = \mathrm{vec}(W)$, $\tilde{N} = -\mathcal{E}_{4m-2}^T \mathcal{E}_{m+1}$ и

$$M = \begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccccccccc}
y_{m-1} & \dots & y_0 & \dots & y_{-m+1} & y_{-m} & z_{m-1} & \dots & z_0 & \dots & z_{-m+2} & z_{-m+1}
\end{array} \\
\left[\begin{array}{cccccccccccc}
E & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
\mathbf{0} & \dots & E & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
\mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & E & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & E & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
\mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & E & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\
\mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & E & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & E & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \dots & \mathcal{A}_0 & \dots & \mathcal{A}_{m-1} & \mathcal{A}_m & \mathbf{0} & \dots & \mathcal{C}_0 & \dots & \mathcal{C}_{m-2} & \mathcal{C}_{m-1}
\end{array}\right]
\end{array},$$

$$N = \begin{array}{c}
\begin{array}{cccccccccccc}
y_{m-1} & y_{m-2} & \dots & y_{-1} & \dots & y_{-m} & z_{m-1} & z_{m-2} & \dots & z_0 & \dots & z_{-m+1}
\end{array} \\
\left[\begin{array}{cccccccccccc}
\mathbf{0} & -E & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & -E & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & -E & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -E & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & -E & \dots & \mathbf{0} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & -E \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\
\mathfrak{A}_m & \mathfrak{A}_{m-1} & \dots & \mathfrak{A}_0 & \dots & \mathbf{0} & \mathfrak{C}_{m-1} & \mathfrak{C}_{m-2} & \dots & \mathfrak{C}_0 & \dots & \mathbf{0}
\end{array}\right]
\end{array}.$$

Для того, чтобы избавиться от интегрального члена в (24), нам потребуется следующее утверждение:

Лемма 15. *Для любой квадратной матрицы L и любой матрицы B такой,* *что существует произведение BL, выполнено*

$$\exp\begin{pmatrix}\mathbf{0} & B\\ \mathbf{0} & L\end{pmatrix}t=\begin{pmatrix}E & B\displaystyle\int_0^t e^{L\tau}d\tau\\ \mathbf{0} & e^{Lt}\end{pmatrix}.$$

Доказательство. Так как степенной ряд для матричной экспоненты можно интегрировать почленно, то

$$\exp\begin{pmatrix}\mathbf{0} & B\\ \mathbf{0} & L\end{pmatrix}t=\begin{pmatrix}E & \mathbf{0}\\ \mathbf{0} & E\end{pmatrix}+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\begin{pmatrix}\mathbf{0} & BL^{k-1}\\ \mathbf{0} & L^k\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}E & B\sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{t^{k+1}}{(k+1)!}L^k\\ \mathbf{0} & \sum\limits_{k=0}^{\infty}\dfrac{t^k}{k!}L^k\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}E & B\displaystyle\int_0^t e^{L\tau}d\tau\\ \mathbf{0} & e^{Lt}\end{pmatrix}. \qquad \blacksquare$$

С учётом леммы 15 система (23), (24) приводится к системе линейных алгебраических уравнений вида

$$\underbrace{\left[M+\begin{pmatrix}-\mathcal{E}_{4m-2}^T & N\end{pmatrix}\exp\left\{\begin{pmatrix}\mathbf{0} & \mathcal{E}_{m+1}\\ \mathbf{0} & L\end{pmatrix}r\right\}\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ E\end{pmatrix}\right]}_{X}\begin{pmatrix}y(0)\\ z(0)\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}\mathbf{0}\\ w\end{pmatrix}. \tag{25}$$

Нетрудно видеть, что вспомогательная система (21), (22) имеет единственное решение тогда и только тогда, когда $\det X\neq 0$.

2.4. Единственность решения граничной задачи

Покажем, что условие Ляпунова обеспечивает единственность решения вспомогательной граничной задачи. Как и для систем (5), начнём рассмотрение с одного вспомогательного утверждения.

Лемма 16. *Для любого решения* (21), (22) *с* $W=\mathbf{0}$ *выполнено*

$$Y_i(t)=Y_{i-1}(t+r),\quad -m+1\leqslant i\leqslant m-1,$$
$$Z_i(t)=Z_{i-1}(t+r),\quad -m+2\leqslant i\leqslant m-1.$$

Доказательство. Схема доказательства такая же, как и в лемме 7. Так как любое решение (21) аналитично на $\mathbb{R}$, то и непрерывно дифференцируемо любое число раз.

Продифференцировав (21), получим, что функции $(Y'(t), Z'(t))$ являются решением системы (21). Проверим, что и граничные условия (22) с $W = \mathbf{0}$ выполнены для $(Y'(t), Z'(t))$. Из (21), (22) видно, что

$$\begin{aligned} Z_i'(0) &= Z_{i-1}'(r) \\ Y_i'(0) &= Y_{i-1}'(r), \quad i \neq 0. \end{aligned}$$

Так как $W = \mathbf{0}$, то

$$Y_0'(0) - Y_{-1}'(r) = \sum_{j=0}^{m} \left[Y_{-j}(0)A_j + A_j^T Y_{j-1}(r) \right] + \sum_{j=0}^{m-1} \left[Z_{-j}(0)C_j + C_j^T Z_j(r) \right] = \mathbf{0}.$$

Также,

$$Z_0'(0) = Y_0(0) - Y_{-1}(0) = Y_{-1}(r) - Y_{-1}(0) = \int_0^r Y_{-1}'(\xi)d\xi.$$

Остаётся проверить последнее граничное условие, сперва заметим, что

$$\sum_{i=1}^{m} Y_{-i}'(0)A_i = -\sum_{i=1}^{m} \left[\sum_{j=0}^{m} A_j^T Y_{-i+j}(0) + \sum_{j=0}^{m-1} C_j^T Z_{-i+j+1}(0) \right] A_i =$$

$$= -\sum_{i=1}^{m} A_0^T Y_{-i}(0)A_i - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} A_j^T Y_{j-i}(0)A_i - \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{m-1} C_j^T Z_{j-i+1}(0)A_i,$$

аналогично,

$$\sum_{i=1}^{m} A_i^T Y_{i-1}'(r) = \sum_{i=1}^{m} A_i^T \left[\sum_{j=0}^{m} Y_{i-j-1}(r)A_j + \sum_{j=0}^{m-1} Z_{i-j-1}(r)C_j \right] =$$

$$= \sum_{i=1}^{m} A_i^T Y_{i-1}(r)A_0 + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} A_i^T Y_{i-j-1}(r)A_j + \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=0}^{m-1} A_i^T Z_{i-j-1}(r)C_j.$$

Отметим, что

$$\sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} A_j^T Y_{j-i}(0)A_i = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{m} A_i^T Y_{i-j-1}(r)A_j.$$

Остаётся рассмотреть ещё следующие слагаемые:

$$A_0^T Y_{-1}'(r) = A_0^T Y_0'(0) = A_0^T Y_0(0)A_0 + \sum_{i=1}^{m} A_0^T Y_{-i}(0)A_i + \sum_{j=0}^{m-1} A_0^T Z_{-j}(0)C_j,$$

$$Y_0'(0)A_0 = Y_{-1}'(r)A_0 = -A_0^T Y_{-1}(r)A_0 - \sum_{i=1}^{m} A_i^T Y_{i-1}(r)A_0 - \sum_{j=0}^{m-1} C_j^T Z_j(r)A_0.$$

Учитывая $Y_0(0) = Y_{-1}(r)$, получим

$$\sum_{i=0}^{m} \left[Y'_{-i}(0)A_i + A_i^T Y'_{i-1}(r)\right] + \sum_{j=0}^{m-1} \left[Z'_{-j}(0)C_j + C_j^T Z'_j(r)\right] =$$

$$= \sum_{j=0}^{m-1} \left[Z'_{-j}(0) + A_0^T Z_{-j}(0) + \sum_{i=1}^{m} A_i^T Z_{i-j-1}(r)\right] C_j +$$

$$+ \sum_{j=0}^{m-1} C_j^T \left[Z'_j(r) - Z_j(r)A_0 - \sum_{i=1}^{m} Z_{j-i+1}(0)A_i\right].$$

Используя лемму 11 и замечание 2, преобразуем выражения в квадратных скобках

$$Z'_{-j}(0) + A_0^T Z_{-j}(0) + \sum_{i=1}^{m} A_i^T Z_{i-j-1}(r) = \int_0^r \left[Y'_{-j-1}(\xi) + \sum_{i=0}^{m} A_i^T Y_{i-j-1}(\xi)\right] d\xi =$$

$$= -\sum_{l=0}^{m-1} \int_0^r C_l^T Z_{l-j}(\xi) d\xi,$$

$$Z'_j(r) - Z_j(r)A_0 - \sum_{i=1}^{m} Z_{j-i+1}(0)A_i = \int_0^r \left[Y'_j(\xi) - \sum_{i=0}^{m} Y_{j-i}(\xi)A_i\right] d\xi =$$

$$= \sum_{l=0}^{m-1} \int_0^r Z_{j-l}(\xi) C_l d\xi.$$

Подставив эти выражения, придём к

$$-\sum_{j=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{m-1} \int_0^r C_l^T Z_{l-j}(\xi) C_j d\xi + \sum_{j=0}^{m-1}\sum_{l=0}^{m-1} \int_0^r C_j^T Z_{j-l}(\xi) C_l d\xi = \mathbf{0},$$

что и требовалось доказать.

По индукции $(Y^{(k)}(t), Z^{(k)}(t))$ также будет решением (21), (22) для всех $k \geqslant 0$. В частности, для всех $k \geqslant 0$

$$Y_i^{(k)}(0) = Y_{i-1}^{(k)}(r), \quad -m+1 \leqslant i \leqslant m-1,$$
$$Z_i^{(k)}(0) = Z_{i-1}^{(k)}(r), \quad -m+2 \leqslant i \leqslant m-1.$$

Утверждение леммы теперь следует из аналитичности функций $Y_i(t)$, $Z_i(t)$. ∎

Из предыдущей леммы и следствия 12 получим

Следствие 17. *Пусть* $(Y(t), Z(t))$ *является решением* (21), (22) *при* $W = \mathbf{0}$. *Тогда*

$$Z_i(t) = \int_{-r}^{0} Y_i(t+\theta)d\theta,$$

где $-m+1 \leqslant i \leqslant m-1$.

Теорема 18. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1. *Вспомогательная система* (21)–(22) *имеет единственное решение.*
2. *Существует единственная матрица Ляпунова уравнения* (16)*, ассоциированная с* w.
3. *Уравнение* (16) *удовлетворяет условию Ляпунова.*

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству теоремы 9.

В теореме 14 было показано, что из утверждения 1 следует утверждение 2.

Покажем, что из утверждения 2 следует утверждение 3. Пусть существует единственная функция Ляпунова, ассоциированная с W, но условие Ляпунова не выполнено. В соответствии с определением 1 спектром системы (16) является множество

$$\Lambda = \left\{ s \in \mathbb{C} : \det \left[sE - \sum_{j=0}^{m} A_j e^{-sjr} - \sum_{j=0}^{m-1} C_j \int_{-(j+1)r}^{-jr} e^{s\theta} d\theta \right] = 0 \right\}.$$

Так как условие Ляпунова не выполнено, то найдётся число $s_0 \in \mathbb{C}$ и векторы $\gamma, \mu \neq \mathbf{0}$, для которых

$$s_0 \gamma^T = \sum_{j=0}^{m} \gamma^T A_j e^{-s_0 jr} + \sum_{j=0}^{m-1} \gamma^T C_j \int_{-(j+1)r}^{-jr} e^{s_0\theta} d\theta,$$
$$-s_0 \mu^T = \sum_{j=0}^{m} \mu^T A_j e^{s_0 jr} + \sum_{j=0}^{n-1} \mu^T C_j \int_{-(j+1)r}^{-jr} e^{-s_0\theta} d\theta.$$

Рассмотрим матрицу $U_0(t) \not\equiv \mathbf{0}$:

$$U_0(t) = e^{s_0 t} \mu \gamma^T + e^{-s_0 t} \gamma \mu^T.$$

Тогда

$$
\begin{aligned}
U_0'(t) &= s_0 e^{s_0 t}\mu\gamma^T - s_0 e^{-s_0 t}\gamma\mu^T = \\
&= e^{s_0 t}\mu\left[\sum_{j=0}^{m}\gamma^T A_j e^{-s_0 jr} + \sum_{j=0}^{m-1}\gamma^T C_j\int_{-(j+1)r}^{-jr} e^{s_0\theta}d\theta\right] + \\
&\qquad + e^{-s_0 t}\gamma\left[\sum_{j=0}^{m}\mu^T A_j e^{s_0 jr} + \sum_{j=0}^{n-1}\mu^T C_j\int_{-(j+1)r}^{-jr} e^{-s_0\theta}d\theta\right] = \\
&= \sum_{j=0}^{m} U_0(t-jr)A_j + \sum_{j=0}^{m-1}\int_{-(j+1)r}^{-jr} U_0(t+\theta)C_j d\theta,
\end{aligned}
$$

то есть выполнено динамическое свойство. Ясно, что $U_0^T(t) = U_0(-t)$. Производная $U_0(t)$ непрерывна в нуле, значит

$$U'(+0) - U'(-0) = \mathbf{0}.$$

Таким образом $U_0(t)$ является функцией Ляпунова, ассоциированной с $W_0 = \mathbf{0}$. Нетрудно видеть, что $U(t)+U_0(t)$ будет отличной от $U(t)$ функцией Ляпунова, ассоциированной с W, что противоречит условию. Значит исходное предположение было неверным и условие Ляпунова выполнено.

Покажем, что из утверждения 3 следует утверждение 1. Пусть условие Ляпунова выполнено. Как было показано ранее, существование единственного решения системы (21), (22) эквивалентно существованию единственного решения системы линейных алгебраических уравнений (25). В свою очередь система (25) имеет единственное решение тогда и только тогда, когда единственным решением однородной системы является тривиальное. Напротив, предположим, что существует $(Y(0), Z(0)) \neq \mathbf{0}$, являющееся решением (25) при нулевой правой части. Данному начальному условию соответствует нетривиальное решение (21), (22) при $W = \mathbf{0}$.

Заметим, что не все $Y_i(t) \equiv \mathbf{0}$. Действительно, иначе из следствия 17 и все $Z_i(t) \equiv \mathbf{0}$, что противоречит нетривиальности решения. Из леммы 16 следует, что все $Y_i(t) \not\equiv \mathbf{0}$.

Любое решение системы (21) можно представить в виде

$$\begin{aligned} Y_i(t) &= \sum_{k=1}^{\nu} e^{s_k t}\mathcal{P}_{i,k}(t), \quad -m \leqslant i \leqslant m-1, \\ Z_i(t) &= \sum_{k=1}^{\nu} e^{s_k t}\mathcal{Q}_{i,k}(t), \quad -m+1 \leqslant i \leqslant m-1, \end{aligned} \tag{26}$$

где $s_1, \ldots, s_\nu$ — различные собственные числа системы (21); $\mathcal{P}_{i,k}(t)$, $\mathcal{Q}_{i,k}(t)$ — полиномы с матричными коэффициентами. Так как $Y_0(t) \not\equiv 0$, то найдётся d, для которого $\mathcal{P}_{0,d}(t) \not\equiv 0$. Пусть $\deg \mathcal{P}_{0,d} = l$:

$$\mathcal{P}_{0,d}(t) = P_0 t^l + P_1 t^{l-1} + \ldots + P_l,$$

где $P_0 \neq \mathbf{0}$. Из следствия 17, получим

$$\sum_{k=1}^{\nu} e^{s_k t}\mathcal{Q}_{0,k}(t) = Z_0(t) = \int_{-r}^{0} Y_0(t+\theta)d\theta = \sum_{k=1}^{\nu} e^{s_k t}\int_{-r}^{0} e^{s_k\theta}\mathcal{P}_{0,k}(t+\theta)d\theta.$$

Значит $\deg \mathcal{Q}_{0,d}(t) \leqslant l$, а коэффициент полинома $\mathcal{Q}_{0,d}(t)$ при t^l имеет вид

$$P_0\int_{-r}^{0} e^{s_d\theta}d\theta.$$

Из леммы 16 следует, что $Y_i(t) = Y_0(t+ir)$, $Z_i(t) = Z_0(t+ir)$, значит степени полиномов $\mathcal{P}_{i,d}(t)$ также равны l со старшим коэффициентом $P_0 e^{s_d ir}$, а $\deg \mathcal{Q}_{i,d}(t) \leqslant l$ с коэффициентом при t^l вида

$$P_0 e^{s_d ir}\int_{-r}^{0} e^{s_d\theta}d\theta = P_0\int_{(i-1)r}^{ir} e^{s_d\xi}d\xi.$$

Подставив представления (26) в (21) получим

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\nu} e^{s_k t}\left[s_k\mathcal{P}_{0,k}(t) + \mathcal{P}'_{0,k}(t)\right] &= \sum_{k=1}^{\nu} e^{s_k t}\left[\sum_{j=0}^{m}\mathcal{P}_{-j,k}(t)A_j + \sum_{j=0}^{m-1}\mathcal{Q}_{-j,k}(t)C_j\right], \\ \sum_{k=1}^{\nu} e^{s_k t}\left[s_k\mathcal{P}_{-1,k}(t) + \mathcal{P}'_{-1,k}(t)\right] &= \sum_{k=1}^{\nu} e^{s_k t}\left[-\sum_{j=0}^{m}A_j^T\mathcal{P}_{j-1,k}(t) - \sum_{j=0}^{m-1}C_j^T\mathcal{Q}_{j,k}(t)\right]. \end{aligned}$$

Так как $s_1, \ldots, s_\nu$ — различны, то квазиполиномы с обеих частей равенства могут быть равны только при равенстве полиномиальных множителей; при $e^{s_d t}$

получим:

$$s_d\mathcal{P}_{0,d}(t)+\mathcal{P}'_{0,d}(t)=\sum_{j=0}^{m}\mathcal{P}_{-j,d}(t)A_j+\sum_{j=0}^{m-1}\mathcal{Q}_{-j,d}(t)C_j,$$

$$s_d\mathcal{P}_{-1,d}(t)+\mathcal{P}'_{-1,d}(t)=-\sum_{j=0}^{m}A_j^T\mathcal{P}_{j-1,d}(t)-\sum_{j=0}^{m-1}C_j^T\mathcal{Q}_{j,d}(t).$$

Рассматривая коэффициенты при t^l, получим

$$s_dP_0=P_0\left[\sum_{j=0}^{m}A_je^{-s_djr}+\sum_{j=0}^{m-1}C_j\int_{-(j+1)r}^{-jr}e^{s_d\xi}d\xi\right],$$

$$-s_dP_0e^{-s_dr}=\left[\sum_{j=0}^{m}A_j^Te^{s_djr}+\sum_{j=0}^{m-1}C_j^T\int_{(j-1)r}^{jr}e^{s_d(\xi+r)}d\xi\right]P_0e^{-s_dr}.$$

Так как $P_0\neq\mathbf{0}$, то

$$\det\left[s_dE-\sum_{j=0}^{m}A_je^{-s_djr}-\sum_{j=0}^{m-1}C_j\int_{-(j+1)r}^{-jr}e^{s_d\xi}d\xi\right]=0,$$

$$\det\left[-s_dE-\sum_{j=0}^{m}A_je^{s_djr}-\sum_{j=0}^{m-1}C_j\int_{-(j+1)r}^{-jr}e^{-s_d\eta}d\eta\right]=0.$$

значит $s_d\in\Lambda$ и $-s_d\in\Lambda$, что невозможно в силу условия Ляпунова. Данное противоречие завершает доказательство теоремы. ∎

2.5. Пример

В работе [8] была рассмотрена система вида

$$\dot{x}(t)=A_0x(t)+C_0\int_{-r}^{0}x(t+\theta)d\theta+C_1\int_{-2r}^{-r}x(t+\theta)d\theta, \tag{27}$$

где

$$A_0=\begin{pmatrix}-1.5 & 0\\ 0.5 & -1\end{pmatrix},$$

$$C_0=\begin{pmatrix}2 & 2.5\\ 0 & -0.5\end{pmatrix},\quad C_1=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}.$$

В статье [8] было получено, что система (27) экспоненциальна устойчива при $r \in [0, 1)$.

Вспомогательная система (21) примет вид

$$\begin{cases} Y_1'(t) = Y_1(t)A_0 + Z_1(t)C_0 + Z_0(t)C_1, \\ Y_0'(t) = Y_0(t)A_0 + Z_0(t)C_0 + Z_{-1}(t)C_1, \\ Y_{-1}'(t) = -A_0^T Y_{-1}(t) - C_0^T Z_0(t) - C_1^T Z_1(t), \\ Y_{-2}'(t) = -A_0^T Y_{-2}(t) - C_0^T Z_{-1}(t) - C_1^T Z_0(t), \\ Z_1'(t) = Y_1'(t) - Y_0'(t), \\ Z_0'(t) = Y_0'(t) - Y_{-1}'(t), \\ Z_{-1}'(t) = Y_{-1}'(t) - Y_{-2}'(t), \end{cases}$$

а граничные условия (22)

$$\begin{cases} Y_1(0) = Y_0(r), \\ Y_0(0) = Y_{-1}(r), \\ Y_{-1}(0) = Y_{-2}(r), \\ Z_1(0) = Z_0(r), \\ Z_0(0) = Z_{-1}(r), \\ Z_0(0) = \int\limits_0^r Y_{-1}(\xi)d\xi, \\ Y_0(0)A_0 + A_0^T Y_{-1}(r) + Z_0(0)C_0 + C_0^T Z_0(r) + Z_{-1}(0)C_1 + C_1^T Z_1(r) = -W. \end{cases}$$

В данном случае соответствующая система линейных уравнений (25) имеет порядок 28×28. Ясно, что система (27) экспоненциально устойчива при $r = 0$. На отрезке $[0, 1.05]$ определитель матрицы X обращается в нуль только при $r = 1$ (рисунок 2). Так как собственные числа системы (27) зависят непрерывно от r, а по теореме 18 вспомогательная система имеет не единственное решение тогда и только тогда, когда не выполнено условие Ляпунова, то при $r < 1$ все собственные числа имеют отрицательные вещественные части, а при $r = 1$ попадают на мнимую ось. Значит система (27) экспоненциальна устойчива при всех $r \in [0, 1)$, что совпадает с результатом из [8]. Ассоциированная с $W = E$ матрица Ляпунова системы (27) при $r = 0.5$ приведена на рисунке 3.

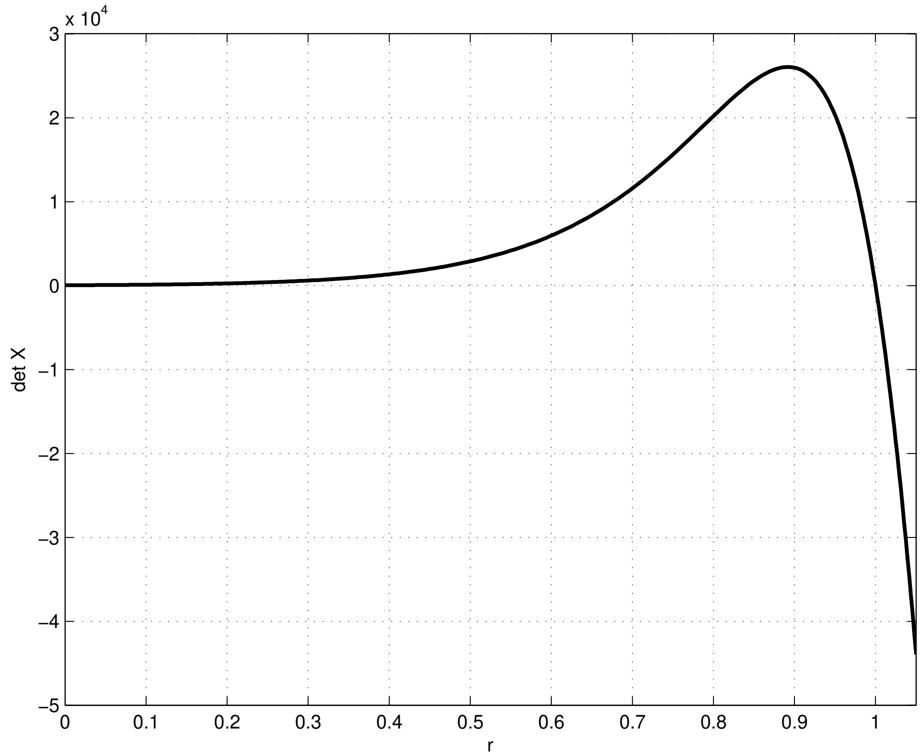

Рис. 2: Определитель матрицы X

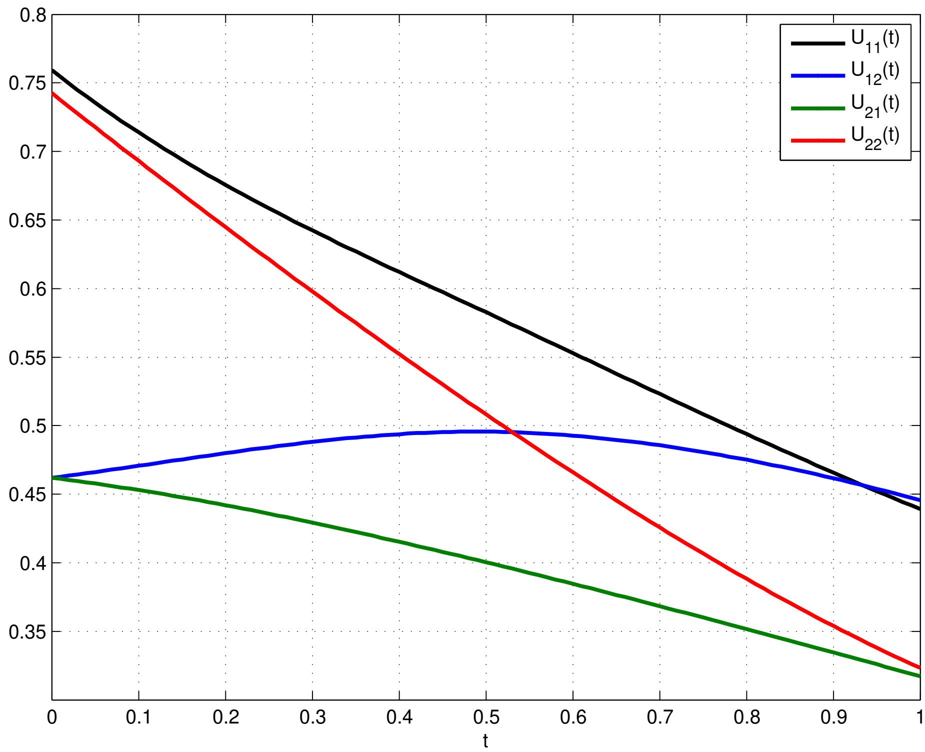

Рис. 3: Компоненты матрицы Ляпунова $U(t)$, $r = 0.5$

Выводы

В данной работе были рассмотрен вопрос построения матриц Ляпунова для различных классов систем с распределённым запаздыванием.

Во-первых, удалось расширить результаты, касающиеся нахождения матриц Ляпунова для систем с экспоненциальным ядром, ранее рассмотренных в [12]. Была предложена новая граничная задача, для которой, в отличие от граничной задачи, рассмотренной в [12], удалось доказать, что найденные решения позволяют построить матрицу Ляпунова. Показано, что в случае единственности решений выражение для матрицы Ляпунова можно упростить. Доказано, что единственность решений граничной задачи эквивалентна выполнению условия Ляпунова или (равносильно) единственности самой матрицы Ляпунова.

Во-вторых, получен новый класс систем с распределённым запаздыванием, для которых возможно точное нахождение матриц Ляпунова: системы с кусочно-постоянным ядром. В результате обобщения идей подхода, заложенного в публикациях [12, 16], были получены аналогичные результаты для данного класса систем. Показано, что если существует матрица Ляпунова, то найдётся решение вспомогательной граничной задачи. Доказано и обратное: известное решение граничной задачи позволяет построить матрицу Ляпунова. Как и ранее, в случае единственности оказывается возможным упрощение формул для нахождения матриц Ляпунова. Удалось показать, что и этом случае единственность решений вспомогательной системы с граничными условиями эквивалентна выполнению условия Ляпунова или же единственности матрицы Ляпунова.

Таким образом, в данной работе класс систем с запаздыванием, для которых существуют методы построения матриц Ляпунова, был существенно расширен.

Заключение

Получены новые классы систем, для которых можно найти матрицу Ляпунова аналитическим способом. Существенно дополнены результаты статьи [12] для систем с распределённым запаздыванием и экспоненциальным ядром. Рассмотрен новый класс систем с распределённым запаздыванием и кусочно-постоянным ядром, для которых также можно найти матрицу Ляпунова. В обоих случаях вспомогательная граничная задача оказывается альтернативным и потенциально более простым способом проверки условия Ляпунова, что может использоваться для решения различных задач параметрической устойчивости.

В качестве дальнейших исследований особый интерес представляет собой вопрос непрерывной зависимости матриц Ляпунова от интегрального ядра и соответствующие оценки погрешности приближения матриц Ляпунова, что позволит применять описанные в работе методы для нахождения матриц Ляпунова систем с распределённым запаздыванием и произвольным непрерывным (или кусочно-непрерывным) интегральным ядром. Заслуживает внимания также распространение полученных результатов на системы нейтрального типа.

Список литературы

[1] Алисейко А. Н. Матрицы Ляпунова для класса систем с экспоненциальным ядром // Вестник Санкт-Петербургского университета. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления, 2017. Т. 13, Вып. 3. С. 228–240.

[2] Красовский Н. Н. Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Физматгиз, 1959. 211 с.

[3] Сумачева В. А. О минимизации $\mathcal{H}_2$ нормы передаточной матрицы для систем запаздывающего типа // Вестник Санкт-Петербургского университета. Серия 10. Прикладная математика. Информатика. Процессы управления, 2014. Вып. 1. С. 128–137

[4] Aliseyko A. N. Lyapunov matrices for a class of time-delay systems with piecewise-constant kernel // International Journal of Control, 2017. P. 1–8. doi:10.1080/00207179.2017.1390261

[5] Bellman R., Cooke K. L. Differential-Difference Equations. N. Y.: Academic Press, 1963. 482 p.

[6] Egorov A. V., Cuvas C., Mondié S. Necessary and sufficient stability conditions for linear systems with pointwise and distributed delays // Automatica, 2017. Vol. 80, P. 218–224.

[7] Garcia-Lozano H., Kharitonov V. L. Lyapunov matrices for time delay systems with commensurate delays // 2nd IFAC Symposium on System, Structure and Control / ed. S. Mondié. Oxford: Elsevier, 2004. Vol. 1. P. 91–95.

[8] Gu K. An improved stability criterion for systems with distributed delays // International Journal of Robust and Nonlinear Control, 2003. Vol. 13, No 9. P. 819–831.

[9] Huang W. Generalization of Liapunov's theorem in a linear delay system // Journal of Mathematical Analysis and Applications, 1989. Vol. 142, No 1. P. 83–94.

[10] Infante E. F., Castelan W. B. A Liapunov functional for a matrix difference-differential equation // Journal of Differential Equations, 1978. Vol. 29, No 3. P. 439–451.

[11] Jarlebring E., Vanbiervliet J., Michiels W. Characterizing and computing the H_2 norm of time-delay systems by solving the delay Lyapunov equation // IEEE Transactions on Automatic Control, 2011. Vol. 56, No 4, P. 814–825.

[12] Kharitonov V. L. Lyapunov matrices for a class of time delay systems // Systems & Control Letters, 2006. Vol. 55, No 7. P. 610–617.

[13] Kharitonov V. L. On the uniqueness of Lyapunov matrices for a time-delay system // Systems & Control Letters, 2012. Vol. 61, No 3. P. 397–402.

[14] Kharitonov V. L. Time-delay systems: Lyapunov functionals and matrices. Basel: Birkhäuser, 2013. 311 p.

[15] Kharitonov, V. L., Hinrichsen, D. Exponential estimates for time delay systems // Systems & Control Letters, 2004. Vol 53, No 5, P. 395–405.

[16] Kharitonov V. L., Plischke E. Lyapunov matrices for time-delay systems // Systems & Control Letters, 2006. Vol. 55, No 9. P. 697–706.

[17] Kharitonov V. L., Zhabko A. P. Lyapunov–Krasovskii approach to the robust stability analysis of time-delay systems // Automatica, 2003. Vol. 39, No 1. P. 15–20.

[18] Ochoa G., Kharitonov V. L., Mondié S. Critical frequencies and parameters for linear delay systems: A Lyapunov matrix approach. // Systems & Control Letters, 2013. Vol. 62, No 9. P. 781–790.

[19] Repin Iu. M. Quadratic Liapunov functionals for systems with delay // Journal of Applied Mathematics and Mechanics, 1965. Vol. 29, No 3. P. 669–672.

[20] Santos O., Mondié S., Kharitonov V. L. Linear quadratic suboptimal control for time delays systems. // International Journal of Control, 2009. Vol. 82, No 1, P. 147–154.